
Stanford University Libraries
3 6105 000 993 126

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Fünf und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Berlin, 1853.

Bei Georg Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des fünf und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

2. Geometrie.

3. Mechanik.

1.
De aequationibus secundi gradus indeterminatis.

Dissertatio inauguralis.

(Auctore *Adolph. Göpel.*) *)

Datis numeris A et C, aequationem $x^2 - Ay^2 = \pm C$ cel. *Lagrange* demonstravit ea conditione resolubilem esse, ut si $C < \sqrt{A}$, fractio $\frac{x}{y}$ sit in numero earum, quae versus $\sqrt{A}$ convergunt. Evoluta igitur radice $\sqrt{A}$ in fractionem continuam, methodum indicavit, qua omnes numeri $C < \sqrt{A}$ invenirentur, per quos aequatio illa solvi posset. Qui, quamvis ab A ita pendeant, ut nonnisi evolutione radicis $\sqrt{A}$ eruantur, nonnulli tamen sunt, qui ex sola discerptione numeri A cognoscantur; quod quomodo fiat in numeris primis formae $4n+3$ eorumque duplis, hisce paginis explicandum mihi constitui.

§. 1.

Quaevis radix $\sqrt{A} = \sqrt{(a^2+b)}$, ubi $a^2 < A < (a+1)^2$, in fractionem continuam eversa, cujus numeratores unitati aequales sint, habet denumeratores (quos quotientes vocant), qui symmetricam formant periodum ejusmodi:

$$(a,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \dots\ \mu_2,\ \mu_1,\ 2a,\ \mu_1,\ \text{cet.}).$$

Designantibus more solito $\frac{a\overset{\circ}{q}+\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}}$, $\frac{aq+p}{q}$ **) fractiones versus $\sqrt{A}$ convergentes, $\frac{J+\sqrt{A}}{D}$ quotientem completum (ut est apud cel. *Legendre*), qui ad quemcunque quotientem μ pertinent, habetur

$$\sqrt{A} = \frac{(a\overset{\circ}{q}+\overset{\circ}{p})D + (aq+p)(J+\sqrt{A})}{\overset{\circ}{q}D + q(J+\sqrt{A})}$$

---

*) (Vide hujus Diarii tom. 35 p. 318 et 313).

**) Adjectis zero proxime antecedentes, apicibus insequentes denotantur.

sive $(qJ+\overset{0}{q}D)\sqrt{A}-(aq+p)\sqrt{A}=(aq+p)J+(a\overset{0}{q}+\overset{0}{p})D-qA$; unde

$$(1.)\qquad qJ+\overset{0}{q}D = aq+p,$$

$$(2.)\qquad pJ+\overset{0}{p}D = bq-ap \text{ atque eliminando } D \text{ vel } J,$$

$$(3.)\qquad J = (p\overset{0}{q}-\overset{0}{p}q)[bq\overset{0}{q}-a(p\overset{0}{q}+\overset{0}{p}q)-p\overset{0}{p}],$$

$$(4.)\qquad D = (p\overset{0}{q}-\overset{0}{p}q)[(aq+p)^2-Aq^2)],$$

ita ut series D sit series valorum expressionis x^2-Ay^2 alternis signis affectorum; et si quod D evolutione radicis $\sqrt{A}$ inventum sit, aequatio $x^2-Ay^2 =\pm D$ per fractionem $\frac{x}{y}$, quae ad illud D pertinet, solvenda est. Deinde quum sit

$$\frac{J+\sqrt{A}}{D} = \mu+\frac{1}{\frac{J'+\sqrt{A}}{D'}},\text{ est}$$

$$(5.)\qquad \mu D = J+J',$$

$$(6.)\qquad A-J'^2 = DD'.$$

Aeq. (6.) docet a esse limitem, quem non excedit J; aeq. (5.), $2a$ esse eum, quem non excedunt μ et D, quippe quod J et D sunt numeri positivi. Praeterea series numerorum $(\dots \overset{0}{J}, J, J', \dots)$ et $(D^0, D, D', \dots)$ utraque habet periodum symmetricam; et si quotientium periodus ita est instituta, ut non habeat terminum medium, $(D, \dots D_x, D_x \dots D_1)$ est ejusdemmodi periodus. Contra est $(J, \dots J_x, J_{x+1}, J_x \dots)$ et aeq. (6.) haec est $A=J_{x+1}^2+D_x^2$, quoniam duo D, quae sunt media, inter se aequalia sunt. Sin terminum medium habeant quotientes, ita $(\mu_1, \dots \mu_x, \vartheta, \mu_x \dots)$, habet etiam series D, non habet J; et aeqq. (5. 6.), posito $\mu=\vartheta$, evadunt:

$$\vartheta D = 2J,\qquad A-\frac{\vartheta^2 D^2}{4} = DD'.$$

Unde elucet, illud D, quod est in media periodo, esse divisorem numeri A, si est impar; numeri $2A$, si est par. Jam quum neque numerus primus p formae $4n+3$ neque ejus duplum possint in formam J^2+D^2 redigi, necesse est ut quotientes radicis $\sqrt{p}$ vel $\sqrt{2p}$ habeant terminum medium, atque medium D sit aut $=2$ aut $=p$. Sed quum p sit $>2a$ et D oporteat esse $<2a$, concluditur D esse $=2$, atque hinc, aequationem $x^2-Ay^2=\pm 2$ solubilem esse, si A est numerus primus $4n+3$ simplex vel duplex. Signum intelligendum est superius, si n est impar, inferius, si n est par; id quod, omissis

ex illa aeqnatione numeri 8 multiplis, in oculis est. Quae, quum satis sint omnibus nota, equidem ab ovo non repeto et quae sit quotientibus radicis $\sqrt{A}$ conditio, si quod est $D=2$, disquiram.

§. 2.

Positis $\frac{\overset{\circ}{m}}{\overset{\circ}{n}}$, $\frac{m}{n}$ fractionibus, quae ad $D=2$ pertinent, in aeqq. (1. et 2.), habes:

$$(7.)\quad n(a-J) = 2\overset{\circ}{n}-m, \qquad (8.)\quad m(a+J)-nb = -2\overset{\circ}{m}$$

unde ea, quae quaeritur, conditio elicienda est.

I. Nam si est $2\overset{\circ}{n}<n$ sive ultimus fractionis $\frac{m}{n}$ quotiens >1, evadit $2\overset{\circ}{n}-m<n$, atque existente $\frac{2\overset{\circ}{n}-m}{n}$ numero integro, $2\overset{\circ}{n}=m$; inde $J=a$. Quotiens correspondens μ est proxime $<\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, ergo $=a$; quamobrem aeqq. (7. et 8.) hae fiunt: $J'=a$, $2am-bn=-2\overset{\circ}{m}$, unde formae $a=\mp\overset{\circ}{m}\overset{\circ}{n}+nz$, $b=2B$, $B=\mp\overset{\circ}{m}{}^2+mz$ eruuntur.

II. Sin est $2\overset{\circ}{n}>n$ sive ultimus fractionis $\frac{m}{n}$ quotiens $=1$, est certe $2\overset{\circ}{n}-m<2n-m$ atque ex aeq. (7.) $2\overset{\circ}{n}-m=n$, $J=a-1$, eodemque ac supra modo $J'=a-1$, $2am-bn=m-2\overset{\circ}{m}$, $a=\pm\overset{\circ}{n}(\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{m})+nz$, $b=2b'+1$, $b'=\pm\overset{\circ}{m}(\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{m})+mz$.

In utroque autem casu habemus duo J, quae contigua sint et aequalia, unde adhibitis aeqq. (5. et 6.) statim deducitur, illud D, quod est 2, esse medium periodi terminum. Radices itaque numerorum A, quibus aequatio $x^2-Ay^2=\pm 2$ solubilis est, in fractionem continuam evolutae, habent quotientium periodum:

I. aut hanc, si $A=a^2+2B$,

$$(a,\mu_1,\ldots.\mu_x,a,\mu_x\ldots.)$$

ubi

$$(9.)\quad m=2\overset{\circ}{n},\quad m\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{m}n=\pm 1,$$

$$(10.)\quad 2am-bn=-2\overset{\circ}{m},$$

II. aut hanc, si $A=a^2+2b'+1$,

$$(a,\mu,\ldots.\mu_{x-1},1,a-1,1,\mu_{x-1},\ldots.\mu_1\ldots.)$$

ubi

$$(11.)\quad m = 2\mathring{n} - n,\ m\mathring{n} - \mathring{m}n = \pm 1;$$
$$(12.)\quad 2am - bn = m - 2\mathring{m}.$$

I. Jam patet ex aeq. (6.) $A - a^2 = 2D'$ sive $D' = B$, id quod huic theoremati locum dat:

„Omnibus numeris primis $4A' + 3$ eorumque duplis $A = a^2 + 2B$, „aequationes $x^2 - Ay^2 = \pm 2$, $= \mp B$ solubiles sunt. Signum intellige superius „vel inferius, prout A (vel $\frac{1}{2}A$) est formae $8A'' + 7$ vel $8A'' + 3$."

II. Item positis $J' = a - 1$, $D = 2$ in aeq. (6.) evadit $A - (a-1)^2 = D'$, $D' = a + b'$. Deinde positis $\mu' = 1$, $D' = a + b'$, $J' = a - 1$, patet $J'' = b + 1$, $D'' = a - b'$. Quae hisce verbis exprimuntur:

„Omnibus numeris primis $4A' + 3$ eorumque duplis $A = a^2 + 2b' + 1$, „aequationes $x^2 - Ay^2 = \pm 2$, $= \mp(a + b')$, $= \pm(a - b')$ solubiles sunt, signis „ut supra habitis."

Haec duo theoremata, quae cel. *Hellerung*, Med. Dri., debentur, eandem methodum secutus exposui qua doctissimus vir in libello manuscripto, quem benigne mecum communicari voluit, meoque permisit arbitrio, ingeniosissima usus est.

§. 3.

Aequationes conditionales supra laudatas paulo accuratius investigabo et ne qua oriatur signorum ambiguitas, seorsim aequationem $x^2 - Ay^2 = -2$ tractabo.

Conjunctis aeqq. (9.), quae ad $A = a^2 + 2B$ spectant, evadit $2\mathring{n}^2 + 1 = \mathring{m}n$, unde concluditur $\mathring{m}$ et n esse formae $u^2 + 2v^2$; cujus mihi, quamvis cognitae, rei demonstrationem liceat afferre. Discerpatur enim quotientium series $(0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_x)$ atque habeatur $(0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{y-1})$ cum convergentibus

$$\frac{\mathring{p}}{\mathring{q}},\ \frac{p}{q}$$

et $(\mu_y, \ldots \mu_x)$ cum convergentibus

$$\frac{\mathring{\pi}}{\mathring{x}},\ \frac{\pi}{x}$$

et i denotante ± 1, erit $p\mathring{q} - \mathring{p}q = i$, $\pi\mathring{x} - \mathring{\pi}x = -i$. Est deinde $\frac{\mathring{m}}{\mathring{n}} = \frac{p\mathring{\pi} + \mathring{p}\mathring{x}}{q\mathring{\pi} + \mathring{q}\mathring{x}}$, $\frac{m}{n} = \frac{p\pi + \mathring{p}x}{q\pi + \mathring{q}x}$ et $m = 2\mathring{n}$ sive

$$(13.)\quad p\pi - 2q\mathring{\pi} = 2\mathring{q}\mathring{x} - \mathring{p}x.$$

Posito

$$(14.)\quad \delta = (p\pi - 2q\mathring{\pi})i = (2\mathring{q}\mathring{x} - \mathring{p}x)i,$$

apparet numeros π, x, $\mathring{\pi}$, $\mathring{x}$ hasce habere formas

$$(15.)\quad \begin{cases} \pi = \delta\mathring{q} + \varepsilon q, & x = \delta q + \varepsilon_1\mathring{q}, \\ 2\mathring{\pi} = \delta\mathring{p} + \varepsilon p, & 2\mathring{x} = \delta p + \varepsilon_1\mathring{p} \end{cases}$$

ea quidem lege, ut sit

$$(16.)\quad \delta^2 + 2 = \varepsilon\varepsilon_1,$$

id quod substitutis valoribus π, x, $\mathring{\pi}$, $\mathring{x}$ in aeq. $\pi\mathring{x} - \mathring{\pi}x = -i$ reperitur. Iidem valores in expressiones $\mathring{m}$ et n substituti dant:

$$(17.)\quad n = \frac{(\varepsilon q + \delta\mathring{q})^2 + 2\mathring{q}^2}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon_1\mathring{q} + \delta q)^2 + 2q^2}{\varepsilon_1},$$

$$(18.)\quad \mathring{m} = \frac{(\varepsilon p + \delta\mathring{p})^2 + 2\mathring{p}^2}{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon_1\mathring{p} + \delta p)^2 + 2p^2}{\varepsilon_1}.$$

Vides numeros ε et ε_1 semper esse positivos. Numerus autem δ positivus vel negativus est prout $\frac{p}{q}$ minorem vel majorem quotientium numerum complectitur; namque si ita discerpitur, ut μ_y fiat ultimus primae partis quotiens, ea $\frac{\mathring{p}}{\mathring{q}}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{\mathring{\pi}}{\mathring{x}}$, $\frac{\pi}{x}$, i et δ, quae adhuc fuerunt, fiunt $\frac{p}{q}$, $\frac{p\mu_y + \mathring{p}}{q\mu_y + \mathring{q}}$, $\frac{\mathring{x}}{\mathring{\pi} - \mathring{x}\mu_y}$, $\frac{x}{\pi - x\mu_y}$, $-i$, δ', unde $\delta' = (2\mathring{q}\mathring{x} - \mathring{p}x)i - \mu_y(px - 2q\mathring{x})i = \delta - \mu_y . \varepsilon_1 . \delta$ igitur eo minor exsistit, quo major est index y. At sumto $y = 1$, est $\delta = 2\mathring{n}$ positivum, et sumto $y = x$, est $\delta' = -2\mathring{n}$ negativum. Est itaque aliquod δ', quod sit negativum, dum δ est positivum aut saltem $= 0$. Quodsi δ est positivum, est $= 1$, id quod hoc modo derivatur. Quoniam

$$\frac{\pi}{x} > \mu_y \text{ i. e. } \delta\mathring{q} + \varepsilon q > (\delta q + \varepsilon_1\mathring{q})\mu_y$$

$$\text{sive } (\varepsilon - \delta\mu_y)q > (\varepsilon_1\mu_y - \delta)\mathring{q},$$

quod per ε_1 multiplicatum, hoc est:

$$2q > \delta(\varepsilon_1\mu_y - \delta)q + \varepsilon_1(\varepsilon_1\mu_y - \delta)\mathring{q},$$

elucet, quod $\varepsilon_1\mu_y - \delta$ positivum esse posuimus:

aut *A*) $\delta(\varepsilon_1\mu_y - \delta) = 1$; unde $\delta = 1$, $\varepsilon\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_1\mu_y = 2$, $\mu_y = 2$, $\varepsilon = 3$, $\varepsilon_1 = 1$, quae in aeqq. (15. 17. 18.) substituta dant

$$\varkappa = 3q + \overset{\circ}{q}, \qquad \varkappa = q + \overset{\circ}{q},$$
$$2\overset{\circ}{\pi} = 3p + \overset{\circ}{p}, \qquad 2\overset{\circ}{\varkappa} = p + \overset{\circ}{p},$$
$$n = \varkappa^2 + 2q^2, \qquad \overset{\circ}{m} = p^2 + 2\overset{\circ}{\varkappa}^2,$$

ubi $p\varkappa - 2q\overset{\circ}{\varkappa} = i$ et fractiones $\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{2p+\overset{\circ}{p}}{2q+\overset{\circ}{q}}$ sunt in numero earum, quae versus $\frac{m}{n}$ convergunt;

aut B) $\delta(\varepsilon_1\mu_y - \delta) = 0$, unde $\delta = 0$, $\varepsilon\varepsilon_1 = 2$, i. e.

aut a) $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_1 = 2$, quod dat

$$\pi = q, \qquad \varkappa = 2\overset{\circ}{q},$$
$$2\overset{\circ}{\pi} = p, \qquad \overset{\circ}{\varkappa} = \overset{\circ}{p},$$
$$n = \pi^2 + 2q^2, \qquad \overset{\circ}{m} = \overset{\circ}{p}^2 + 2\overset{\circ}{\pi}^2,$$

ubi $\overset{\circ}{p}\pi - 2\overset{\circ}{q}\overset{\circ}{\varkappa} = i$ et $\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}}$, $\frac{p}{q}$ versus $\frac{m}{n}$ convergunt,

aut b) $\varepsilon = 2$, $\varepsilon_1 = 1$, unde

$$\pi = 2q, \qquad \varkappa = \overset{\circ}{q},$$
$$\overset{\circ}{\pi} = p, \qquad 2\overset{\circ}{\varkappa} = \overset{\circ}{p},$$
$$n = \varkappa^2 + 2q^2, \qquad \overset{\circ}{m} = p^2 + 2\overset{\circ}{\varkappa}^2,$$

ubi $\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}}$, $\frac{p}{q}$ versus $\frac{m}{n}$ convergunt et $p\varkappa - 2q\overset{\circ}{\varkappa} = i$.

Quibus omnibus in unum collectis, concludendum est, omnes formae $2\overset{\circ}{n}^2 + 1$ divisores posse per formam $u^2 + 2v^2$ exprimi; ita quidem, ut si sit $n = u^2 + 2v^2$, $\overset{\circ}{m} = \alpha^2 + 2\beta^2$, habeatur $\alpha u - 2\beta v = i$, $\overset{\circ}{n} = \alpha v + \beta u$ atque aut $\frac{2\beta-\alpha}{u-v}$, $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{2\beta+\alpha}{u+v}$ aut $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{2\beta}{u}$ aut $\frac{2\beta}{u}$, $\frac{\alpha}{v}$ versus $\frac{m}{n}$ convergant, prout est aut $2v > u > v$ aut $u > 2v$ aut $u < v$.

Istae jam fractiones singulatim pro $\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}}$ et $\frac{p}{q}$ in aeqq. (3. et 4.) ponantur atque eruantur correspondentes numeri J et D, quae ut uno ictu perficiantur. substituas

$$\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}} = \frac{2d^0\beta + \overset{\circ}{e}\alpha}{d^0u + \overset{\circ}{e}v}, \qquad \frac{p}{q} = \frac{2d\beta + e\alpha}{du + ev}$$

atque deinceps pro d, e, d^0, $\overset{\circ}{e}$ qui iis conveniunt, valores ponas.

Invenitur $p\overset{\circ}{q} - \overset{\circ}{p}q = (d^0 e - d\overset{\circ}{e})i$ et

$$(19.)\quad J = (d^0 e - d\overset{\circ}{e})i \left\{ \begin{array}{l|l} u^2 b & \\ -4u\beta a & dd^0 \\ -4\beta^2 & \end{array} \right.$$

$$\left. + \begin{array}{l|l} u^2 vb & \\ -(\alpha u + 2\beta v)a & (d\overset{\circ}{e} + d^0 e) \\ -2\alpha\beta & \end{array} \begin{array}{l|l} +v^2 b & \\ -2\alpha va & e\overset{\circ}{e} \\ -\alpha^2 & \end{array} \right\}.$$

Aequationis (10.) ope evenit

$$u^2 b - 4u\beta a - 4\beta^2 = 2(-v^2 b + 2\alpha va + \alpha^2),$$

quare designantibus brevitatis causa

$$(20.)\quad \varphi = [-uvb + (\alpha u + 2\beta v)a + 2\alpha\beta]i,$$

$$(21.)\quad \psi = (-v^2 b + 2\alpha va + \alpha^2)i = \tfrac{1}{2}(u^2 b - 4u\beta a - 4\beta^2)i,$$

habetur $J = (d^0 e - d\overset{\circ}{e})[2dd^0 - e\overset{\circ}{e})\psi - (d\overset{\circ}{e} + d^0 e)\varphi]$. Computatione expressionis D supersederi potest, namque comparatis inter se aeqq. (3. et 4.) apparet ex tertia, mutatis signo et $\overset{\circ}{p}$, $\overset{\circ}{q}$ in p, q, quartam fieri. Est itaque

$$D = (d^0 e - d\overset{\circ}{e})[(e^2 - 2d^2)\psi + 2de\varphi].$$

§. 4.

Alteram jam conditionem (11.), quae ad $A = a^2 + 2b' + 1$ pertinet, eodem modo tracto. Fit enim $2\overset{\circ}{n}{}^2 + 1 = (\overset{\circ}{m} + \overset{\circ}{n})n$, accommodatisque iis, quae supra dixi, ad hunc casum, constat esse $n = u^2 + 2v^2$, $\overset{\circ}{m} + \overset{\circ}{n} = \alpha^2 + 2\beta^2$, existente $\alpha u - 2\beta v = i$, $\overset{\circ}{n} = \alpha v + \beta u$, $\overset{\circ}{m} = \alpha(\alpha - v) + \beta(2\beta - u)$; constat insuper fractiones $\frac{2\beta - \alpha}{u - v}$, $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{2\beta + \alpha}{u + v}$ aut $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{2\beta}{u}$ versus $\frac{2\overset{\circ}{n}}{n}$ convergere, unde colligitur $\frac{(2\beta - u) - (\alpha - v)}{u - v}$, $\frac{\alpha - v}{v}$, $\frac{(2\beta - u) + (\alpha - v)}{u + v}$ aut $\frac{\alpha - v}{v}$, $\frac{2\beta - u}{u}$ aut $\frac{2\beta - u}{u}$, $\frac{\alpha - v}{v}$ esse in numero earum, quae versus $\frac{2\overset{\circ}{n} - n}{n}$ sive $\frac{m}{n}$ convergant, prout est $2v > u > v$ aut $u > 2v$ aut $u > v$. In eodem fere, quo supra, loco res est. Namque ubi fuit 2β, α, hic est $2\beta - u$, $\alpha - v$. Designantibus itaque, adhibita aeq. (12.)

$$(22.)\quad \varphi = [-uvb + ((\alpha - v)u + (2\beta - u)v)a + (\alpha - v)(2\beta - u)]i,$$

$$(23.)\quad \psi = [-v^2 b + 2(\alpha - v)va + (\alpha - v)^2]i$$

$$= \tfrac{1}{2}[u^2 b - 2(2\beta - u)ua - (2\beta - u)^2]i,$$

J et D habent easdem atque supra formas.

A. Jam si est $2v > u > v$ ponatur successive $d=1$, $e=-1$; $d=0$, $e=1$; $d=1$, $e=1$, invenientur $D^0=\psi+2\varphi$; $J=\psi-\varphi$, $D=\psi$; $J'=\psi+\varphi$, $D'=\psi-2\varphi$.

B. Si est $u > 2v$, ponatur $d=0$, $e=1$; $d=1$, $e=0$, fit $D^0=\psi$; $J=\varphi$, $D=2\psi$.

C. Sin est $u < v$, ponatur $d=1$, $e=0$; $d=0$, $e=1$, evadit $D^0=2\psi$; $J=-\varphi$, $D=\psi$,

atque omnibus casibus id est commune, ut sit $A=J^2+DD^0=\varphi^2+2\psi^2$, unde apparet quem vis numerum primum $8n+3$ in quadratum duplicemque quadratum dissolvi posse.

ψ omnino est positivum, φ autem, quod signum habeat, ex aeq. (24.) $(u^2-2v^2)\psi-2uv\varphi=i$, quam multiplicatis aeqq. (20.) (vel 22.) per $4uv$, summa aeqq. (20.) (vel 23.) per u^2-2v^2 alteraque ab altera subtractis eruere licet, cognosces. Habet enim idem, quod u^2-2v^2, signum. Haec aequatio docet quoque expressiones $4\varphi^2-\psi^2$ et $(u^2-2v^2)^2-4u^2v^2$ sive $(u^2-4v^2)(u^2-v^2)$ eodem esse signo praeditas. Quare si est $\psi > 2\varphi$, signi nulla ratione habita, reperitur $2v > u > v$, quod sub (A.) evenit; sin est $\psi < 2\varphi$, est aut $u > 2v$ aut $u < v$, quae ad (B.) et (C.) pertinent. Invento itaque relationis inter u et v criterio, quum numeri primi eorumque dupli una tantum ratione per formam x^2+2y^2 exprimi possint,*) hocce propono theorema:

„Numeris primis $8n+3$ atque eorum duplis $A=\varphi^2+2\psi^2$, aequationes „indeterminatae $x^2-Ay^2=-i(\psi+2\varphi)$, $=i\psi$, $=-i(\psi-2\varphi)$ solubiles „sunt, si est $\psi > 2\varphi$; aequationes $x^2-Ay^2=-i.2\psi$, $=i.\psi$, si est $\psi < 2\varphi$."

De signo literae i infra dicturus sum.

§. 5.

Venio nunc ad eos numeros A, quibus aequatio $x^2-Ay^2=2$ propria est, id quod imprimis numeris primis $8n+7$ eorumque duplis convenit atque deinceps ejus casus, qui est in §. 2 sub I. rationem habeo.

Discerpentibus, ut in §. 3, quotientium seriem atque iisdem literis utentibus, est $p\overset{0}{q}-\overset{0}{p}q=i$, $\pi\overset{0}{x}-\overset{0}{\pi}x=i$ et

$$(25.)\quad \delta=(p\pi-2q\overset{0}{\pi})i=(2\overset{0}{q}\overset{0}{x}-\overset{0}{p}x)i,$$

$$(26.)\quad \begin{cases} \pi=\delta q+\varepsilon q, & x=\delta q+\varepsilon_1\overset{0}{q}, \\ 2\overset{0}{\pi}=\delta\overset{0}{p}+\varepsilon p, & 2\overset{0}{x}=\delta p+\varepsilon_1\overset{0}{p} \end{cases}$$

*) Vid. *Legendre*, Théorie des Nombres.

existente conditione

$$(27.)\qquad \delta^2 - 2 = \varepsilon\varepsilon_1.$$

Fiunt deinde

$$(28.)\qquad n = \frac{(\varepsilon q + \delta \overset{\circ}{q})^2 - 2\overset{\circ}{q}^2}{\varepsilon},$$

$$(29.)\qquad 2\overset{\circ}{m} = \frac{(\varepsilon p + \delta \overset{\circ}{p})^2 - 2\overset{\circ}{p}^2}{\varepsilon},$$

$$(30.)\qquad \overset{\circ}{n} = \frac{\pi\overset{\circ}{\varkappa} + \overset{\circ}{p}q}{\delta}.$$

Numerus itaque δ est positivus et quum sit $\delta' = \delta - \varepsilon_1\mu_\gamma$, δ minuitur, donec ε_1 est positivum, augetur, donec est negativum. Existente, $\delta'^2 - 2 = \varepsilon'\varepsilon'_1$, $\varepsilon' = \varepsilon_1$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon''$, vides esse $\varepsilon'\varepsilon'_1 > \varepsilon\varepsilon_1$ si ε_1 negativum, $\varepsilon'\varepsilon'_1 < \varepsilon.\varepsilon_1$ si est positivum, omni igitur ratione esse ε'_1 sive $\varepsilon'' < \varepsilon$; quare, si duo contigua ε sunt negativa, omnia reliqua eodem erunt signo affecta. Jam quum pro indice $\gamma = 1$ fiat $\varepsilon = n$ positivum et pro $\gamma = x$, $\varepsilon = -\overset{\circ}{m}$ negativum, erit aliquod ε et unum quidem, quod sit positivum, dum ε' est negativum; quod cum aeq. (27.) comparatum, efficit $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$; etenim, si ε'' esset positivum, haberentur duo contigua et aequalia δ, id quod absurdum est.

Aeqq. (27—29.) hae sunt

$$n = (q + \overset{\circ}{q})^2 - 2\overset{\circ}{q}^2,$$

$$\overset{\circ}{m} = 2\left(\frac{p+\overset{\circ}{p}}{2}\right)^2 - \overset{\circ}{p}^2,$$

$$\overset{\circ}{n} = \left(\frac{p+\overset{\circ}{p}}{2}\right)(q + \overset{\circ}{q}) + \overset{\circ}{p}q.$$

Elucet inde n habere formam $= u^2 - 2v^2$, $\overset{\circ}{m} = 2\beta^2 - \alpha^2$, ita ut sit $\alpha u - 2\beta v = i$, $\overset{\circ}{n} = \beta u - \alpha v$ et fractiones $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{2\beta - \alpha}{u - v}$ versus $\frac{m}{n}$ convergant. Substitutis itaque $\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}} = \frac{2d^0\beta + \overset{\circ}{e}\alpha}{d^0 u + \overset{\circ}{e}v}$, $\frac{p}{q} = \frac{2d\beta + e\alpha}{du + ev}$ in aeqq. (3. et 4.), eandem illam aeq. (19.) oriri in promtu est. Sed aeq. (10.) nunc fit:

$$-u^2 b + 4\beta u a + 4\beta^2 = 2(-v^2 b + 2\alpha v a + \alpha^2),$$

quare designantibus

$$(31.)\qquad \varphi = [-uvb + (\alpha u + 2\beta v)a + 2\alpha\beta]i,$$

$$(32.)\qquad \psi = [-v^2 b + 2\alpha v.a + \alpha^2]i$$

$$= \tfrac{1}{2}[-u^2 b + 4\beta u a + 4\beta^2]i$$

est

$$J = (d\overset{\circ}{e} - d^0 e)[(2dd^0 + e\overset{\circ}{e})\psi + (d\overset{\circ}{e} + d^0 e)\varphi],$$
$$D = (d^0 e - d\overset{\circ}{e})[(2d^2 + e^2)\varphi + 2de\varphi].$$

§. 6.

Altera aequatio (11.) quae est $2\overset{\circ}{n}^2 - 1 = (\overset{\circ}{m} + \overset{\circ}{n})n$ docet esse $n = u^2 - 2v^2$, $\overset{\circ}{m} + \overset{\circ}{n} = 2\beta^2 - \alpha^2$, $\alpha u - 2\beta v = i$ unde $\overset{\circ}{n} = \beta u - \alpha v$, $\overset{\circ}{m} = \beta(2\beta - u) - \alpha(\alpha - v)$ et fractiones $\frac{\alpha}{v}$, $\frac{2\beta - \alpha}{u - v}$ versus $\frac{2\overset{\circ}{n}}{n}$ vel $\frac{\alpha - v}{v}$, $\frac{(2\beta - u) - (\alpha - v)}{u - v}$ versus $\frac{m}{n}$ convergere sequitur. Quare quum

$$\frac{\overset{\circ}{p}}{\overset{\circ}{q}} = \frac{d^0(2\beta - u) + \overset{\circ}{e}(\alpha - v)}{d^0 u + \overset{\circ}{e} v}, \quad \frac{p}{q} = \frac{d(2\beta - u) + e(\alpha - v)}{du + ev}$$

in aeqq. (3. et 4.) ponenda sint, res se eodem, atque in §. superiori, modo habet, nisi quod hic est $2\beta - u$, $\alpha - v$, ubi fuit 2β, α. Designent itaque

$$(32.) \quad \varphi = [-uvb + ((\alpha - v)u + (2\beta - u)v)a + (2\beta - v)(\alpha - v)]i,$$
$$(33.) \quad \psi = [-v^2 b + 2(\alpha - v)va + (\alpha - v)^2]i$$
$$= \tfrac{1}{2}[-u^2 b + 2(2\beta - u)ua + (2\beta - u)^2]i$$

et reperiuntur pro J et D eaedem, quae in §. superiori sunt, expressiones.

Substitutis jam suis pro d, e valoribus, nimirum $d = 0$, $e = 1$; $d = 1$, $e = -1$, existit $D^0 = \psi$; $J = \varphi - \psi$, $D = 2\varphi - 3\psi$, unde $A = J^2 + D.D^0 = \varphi^2 - 2\psi^2$; i. e. numerus primus $8n + 7$ in formam $\varphi^2 - 2\psi^2$ redigi potest. Quod quum innumeris modis effici queat, antequam theorema de aequatione nostra proponatur, disquirendum est, ad quamnam repraesentationem per formam $\varphi^2 - 2\psi^2$ illud ψ pertineat; oportet enim ψ infra $2a$ esse. Una certe repraesentatio est ita instituta, ut sit $\psi < 2a$, ea nimirum, quae minimis numeris expressa est et per $f^2 - 2g^2$ denotetur. Reliquas omnes haec formula:

$$(pf - 2qg)^2 - 2(qf - pg)^2,$$

positis pro p et q omnibus, qui aequationi $p^2 - 2q^2 = 1$ satisfaciunt, positivis vel negativis valoribus, complectitur. Etenim denotantibus 2μ maximum inter $\varphi + f$ et $\psi + g$, 2ν inter $\varphi - f$ et $\psi - g$ divisorem, est

$$\varphi + f = 2\mu\alpha, \quad \varphi - f = 4\nu\beta, \quad \psi + g = 2\mu\beta, \quad \psi - g = 2\nu\alpha$$

sive

$$f^2 - 2g^2 = \varphi^2 - 2\psi^2 = (\mu^2 - 2\nu^2)(\alpha^2 - 2\beta^2),$$

cujus alter factor ex. gr. $\mu^2 - 2\nu^2 = \pm 1$. Eliminatis ex illis aeqq. (α. et β.), fit

$$\nu(\varphi+f) = \mu(\psi-g),$$
$$2\nu(\psi+g) = \mu(\varphi-f)$$

sive

$$\pm\psi = (\mu^2+2\nu^2)g+2\mu\nu f,$$
$$\pm\varphi = (\mu^2+2\nu^2)f+4\mu\nu g$$

unde, existente $(\mu^2+2\nu^2)^2-2(2\mu\nu)^2=(\mu^2-2\nu^2)^2=1$, formula supra laudata orta est.

Res itaque vertitur in eo, ut valores p et q inveniantur, qui $qf-pg<2a$ reddant. Fit autem

$$qf-2a<pg,$$
$$q^2f^2-4aqf+4a^2<g^2p^2<g^2(2q^2+1),$$
$$Aq^2-4aqf<g^2-4a^2,$$
$$(Aq-2af)^2<(A+8a^2)g^2,$$
$$q<\frac{2af+\sqrt{(A+8a^2.g)}}{A}$$

et quum $g<2a$, $f<3a$ esse posuerimus, $q<12$ sequitur. Soluta aequatione $p^2-2q^2=1$, inveniuntur pro $\frac{p}{q}$ hi valores: $\frac{1}{0}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{17}{12}$ cet.

Unus est itaque, qui q contingat, valor, nimirum $q=2$, $p=3$, ita ut duae tantum sint numeri A repraesentationes, quarum altera si est $\varphi^2-2\psi^2$, altera erit $(3\varphi-4\psi)^2-2(2\varphi-3\psi)^2$; atque $2\varphi-3\psi$ sit idem illud D, quod supra inventum est. Quae, quomodo ad numeros primorum duplos accommodentur, quum satis in medio sit, hocce proponere licet theorema.

„Numeris primis $8n+7$ eorumque duplis $A=\varphi^2-2\psi^2$, ubi $\psi<2a$, „aequationes $x^2-Ay^2=i.\psi$, $=-i(2\varphi-3\psi)$ solubiles sunt."

§. 7.

Reliquum est, ut de signo literae i nonnulla dicam, cujus determinandi modum suppeditant aeq. (23.) $(u^2-2v^2)\psi-2uv\varphi=i$ et aeq. (35.) $(u^2+2v^2)\psi-2uv\varphi=i$, quae ex aeqq. (33. et 34.) comparata est. Quamvis enim u et v incognita sint, constat tamen u esse impar et ad eliminandas ex illis aequationibus literas u et v satis est numeri 8 multipla relinquere. Aequatio itaque (23.) fit:

$$\psi-2v(u\varphi+v\psi)\equiv i \pmod{8}.$$

Jam si $\varphi^2+2\psi^2$ est numerus primus, φ est impar; sin est primi duplex, erit $\varphi=2\varphi_1$ atque φ_1 impar, quoniam $\psi^2+2\varphi_1^2$ est numerus primus. Posito φ impari, aut v aut $u\varphi+v\psi$ est par et habes

$$\psi\equiv i \pmod{4}.$$

Posito autem $\varphi = 2\varphi_1$, φ_1 impari, evenit

$$\psi \equiv i \text{ (mod. 8) pro } v \text{ pari,}$$

$$\psi + 4 \equiv -i \text{ (mod. 8) sive } \psi \equiv 3i \text{ pro } v \text{ impari,}$$

unde elucet i esse aut $=1$ aut -1, prout ψ habet formam $8n+2\pm1$ aut $8n+6\pm1$.

In altera aequatione (35.), quae fit

$$\psi + 2v(v\psi - u\varphi) \equiv i \text{ (mod. 8)},$$

φ aut impar aut per 4 divisibile ponendum est, quum numeris primis $8n+7$ conveniat φ impar, primorum duplis sit $\varphi = 2\varphi_1$ et $\frac{1}{2}A = 2\varphi_1^2 - \psi^2$, unde φ_1 par est. Habes itaque

$$\psi \equiv i \text{ (mod. 4)}$$

si φ impar ponis; atque pro $\varphi = 4\varphi_1$ fit

$$\text{aut } \psi \equiv i \text{ (mod. 8) aut } 3\psi \equiv i \text{ sive } \psi \equiv 3i \text{ (mod. 8)},$$

unde colligitur esse $i=1$ aut $=-1$ prout ψ est formae $8n+2\pm1$ aut $8n+6\pm1$. Quibus omnibus collectis, quum aut $\psi-3$ aut $\psi-1$ per 4 divisible sit, signorum regula haec est: Pro A numero primo, est $i = (-1)^{\frac{\psi-1}{2}}$, pro A primi duplo, est $i = (-1)^{\frac{(\psi-2)\pm1}{4}}$.

§. 8.

Hisce equidem brevissimam eas, quas solubiles esse demonstravi, aequationes solvendi methodum adjiciam, quae etiamsi in universum adhiberi nequeat, laboriosae tamen, ubi suppetit, magnarum radicum evolutioni praeferenda est. Numerorum enim, qui eandem habent periodum sive idem $\frac{m}{n}$, multitudo est infinita et unus est, qui sit reliquis minor, quem sui generis minimum dicere licet. Datisque m et n sive u et v, per aequationem indeterminatam

$$(u^2 \mp 2v^2)\psi - 2uv\varphi = i$$

omnes valores φ et ψ, quorum singuli sunt $< u^2 \mp 2v^2$ et $< 2uv$ atque inde omnes A inveniuntur, qui datam habeant periodum. Vice itaque versa, datis φ et ψ quum unum certumque $\frac{u}{v}$ conveniat, aequatio illa numeros $u^2 \mp 2v^2$ et $2uv$ inveniendi modum subministrat, modo ne sit A sui generis minimus. Nam quotiescunque abstrahentibus a signo est $\varphi > u^2 \mp 2v^2$, $\psi > 2uv$, satis erit aequationem $\varphi'\psi - \psi'\varphi = i$ ita solvisse, ut ψ' sit par et $< \psi$, id quod una tantum ratione fieri posse constat: contra, si A est minimus sive $\varphi < u^2 \mp 2v^2$, $\psi < 2uv$, erit $u^2 \mp 2v^2 = \varphi' + z.\varphi$, $2uv = \psi' + z\psi$ et si quis numerum z quaerere velit, is rursus in aequationem quadratam, quam evitare vult, incidat.

At quum numerum φ interdum negativum esse viderimus, pro φ pono $x\varphi$ et xw pro $u^2 \mp 2v^2$, habitis φ et w positivis, quoniam illis numeris idem est signum x. Est igitur aequatio $w\psi - 2uv\varphi = xi$. Quare resoluta aequatione $\varphi'\psi - \psi'\varphi = \lambda = \mp 1$, ita ut sit ψ' par et $< \psi$, numerus $\varphi'^2 \pm 2\psi'^2$ computandus est, qui si non fit quadratus, A est sui generis minimus, cujus casus rationem amplius non habeo. Sin fit quadratus, est $\varphi'^2 \pm 2\psi'^2 = n^2 = (u^2 \pm 2v^2)^2$ et habes $w = \varphi'$, $2uv = \psi'$, $xi = \lambda$. Jam si est $n + w$ sive $(u^2 \pm 2v^2) + x(u^2 \mp 2v^2)$ imparis duplum, x est $= 1$ et $u^2 = \frac{n+w}{2}$, $v^2 = \pm \frac{n-w}{4}$ $i = \lambda$. Sed si $n + w$ per 4 divisibile, id quod superiori tantum signo contingere potest, est $x = -1$ et $u^2 = \frac{n-w}{2}$, $v^2 = \frac{n+w}{4}$, $i = -\lambda$.

Erutis hoc modo valoribus u et v, per alteram linearem aequationem $\alpha u - 2\beta v = i$, α et β inveniuntur. In (§§. 3. et 5.) est fractio versus $\frac{m}{n}$ convergens $\frac{\alpha}{v}$, unde $\alpha < v$; in (§§. 4. et 6.) est $\frac{\alpha - v}{v}$, unde $\alpha < 2v > v$. Aequatio igitur $\alpha u - 2\beta v = i$ ita resolvi debet, ut sit $\alpha < v$ pro numero $A = a^2 + 2B$; $2v > \alpha > v$ pro numero $A = a^2 + 2b' + 1$. Quibus valoribus inventis, hasce habes solutiones minimas:

$$(av + \alpha)^2 - A.v^2 = i\psi,$$
$$(au + 2\beta)^2 - A.u^2 = -i.2\psi,$$
$$((a-1)(u \mp v) + 2\beta \mp \alpha)^2 - A.(u \mp v)^2 = -i(\psi \pm x.2\varphi),$$
$$((a-1)(u-v) + 2\beta - \alpha)^2 - A\,(u-v)^2 = -i(2\varphi - 3\psi)$$

et qua lege reliquae inveniantur, omnibus constat.

§. 9.

At si numeri φ et ψ non fuerint dati, habes certe methodum numeros primos $A = 4n + 3$ per formam $\varphi^2 \pm 2\psi^2$ exprimendi, simillimam ei, quam Cel. ***Gauss*** in disquistionibus arithmeticis (n. 265) de discerptione numerorum primorum $4n + 1$ in duo quadrata proposuit. Evoluta enim radice $\sqrt{A} = \sqrt{(8n+3)}$ in fractionem continuam cum quotientibus completis, invenietur aliquis denominator, qui sit dimidius proxime antecedentis vel insequentis vel ipsorum summae, atque hic est ψ et habetur $A = \varphi^2 + 2\psi^2$. Atque in numeris primis formae $8n + 7$, eodem modo existent duo denominatores contigui, quorum summa sit duplex correspondentis J, quorum uterque pro ψ summi potest, ita ut habeatur $A = \varphi^2 - 2\psi^2$.

Curriculum vitae.

Ego *Adolphus Goepel* mense Septembri anni MDCCCXII patre Saxone. artis musices praeceptore, Rostochii natus sum. Decem annos natum avunculus, Britannicarum rerum in Corsica insula praefectus, secum in Italiam duxit, atque in mathematicis et reliquis, quae in gymnasiis coluntur, artibus instituit. Per varias Italiae urbes vagatus hiemes postremum annorum MDCCCXXV et MDCCCXXVI. Pisis transegi publicisque universitatis literariae lectionibus adfui, mathematicis Cel *Pieraccioli* de algebra et calculo differentiali, Cel. *Poletti* de statice et mechanice analytica, physicis theoreticis Cel. *Gerbi,* et experimentalibus Cel. *Gatteschi.* Sexto anno domum redux, in primam classem Gymnasii Rostochiensis receptus ibique duos annos commoratus sum. Inter quod tempus mihi contigit, ut in consuetudinem cum Cel. *Beck,* philosophiae professore, quem summa pietate patronum veneror, venirem, qui singulari me amore complexus, mathematica studia fovit et aluit. Schola deinde abiens, Berolinum, profectus et civibus universitatis literariae adscriptus sum atque hisce lectionibus adfui: Cel. *Dirichlet* de theoria aequationem partialium, Cel. *Dirksen* de applicatione calculi differentialis ad geometriam et de theoria linearum et superficierum curvarum; Cel. *Erman* de electricitate et magnetismo atque de calore et lumine, Cel. *Heyse* de Horatii Satyris, Cel. *Ideler* de Arati Phaenomenis, Cel. *Michelet* de philosophia historiae, Cel. *Mitscherlich* de Electrochemia, Cel. *Ohm* de calculo differentiali et integrali, de analysi finitorum, de geometria analytica, de calculo variationum, de geometria Euclidea, de statice et mechanice analytica, Cel. *Pohl* de Electromagnetismo, Cel *a Raumer* de historia universali, Cel. *Steffens* de theologia philosophica, Cel. *Toelken* de aesthetice, Cel. *Zumpt* de arte latine scribendi. Annum jam insequentem disquisitionibus arithmeticis Cel. *Gaufs* et theoriae numerorum Cel. *Legendre* operam navavi, unde, doctoris gradum atque honorem ambiens, materiam dissertationis depromsi.

2.
Zur Theorie der Ebene.

(Vom Herausgeber.)

(Gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Mai 1834.)*)

Bekanntlich hat man sich vielfältig bemüht, einigen von den Stellen der Euklidischen Geometrie, die entweder nicht so klare Vorstellungen gewähren, oder denen eine nicht so ununterbrochene Folgerichtigkeit eigen ist, als dem ganzen übrigen, so vortrefflichen Werke, jene Klarheit der Vorstellungen zu verschaffen und die Lücken der Schlufsfolgen auszufüllen. Insbesondere waren, zum Beispiel, die Bemühungen um die *Theorie der Parallelen* zahlreich, obgleich von denselben wenigstens alle diejenigen, die nur von *Euklides* Sätzen ausgingen und bei seinen Hülfsmitteln stehen blieben, immerfort mifslangen. Auch um einiges Andere hat man sich vielfältig bemüht, jedoch nicht um alles, was zu wünschen übrig bleibt, *gleich* angelegentlich. Gleichwohl ist darunter ein Gegenstand, der nicht minder unvollkommen, obschon gewifs nicht minder einflufsreich auf alles Übrige sein dürfte, als irgend ein anderer: ja, der selbst noch unvollkommener, obgleich eben so wichtig ist, als die Parallelen-Theorie. Dieser Gegenstand ist die *Theorie der Ebene*. Bei den Parallelen drückt sich *Euklid* wenigstens völlig bestimmt und klar aus, und die Schwierigkeit ist nur, dafs dort ein Satz ohne Beweis angenommen werden soll, der des Beweises fähig zu sein und zu bedürfen scheint. Bei der Ebene dagegen sind die Worte des grofsen Lehrers der Geometrie sehr unbestimmt, wenigstens dunkel. *Euklid* sagt: „Eine Ebene ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt." Diese Definition scheint derjenigen nachgebildet, welche er von der geraden Linie giebt, und welche diese Linie für diejenige erklärt, „die zwischen jeden in ihr befindlichen Puncten auf einerlei Art liegt." Die Worte „auf einerlei Art liegt" geben aber offenbar keinen, auch nur einigermafsen

---

*) Der Herausgeber hält es für nicht unrecht, dieser Abhandlung hier in diesem Journale den Raum, welchen sie einnimmt, für diejenigen Leser zu gestatten, denen vielleicht die Denkschriften der Berliner Akademie nicht zu Gesicht kommen; denn der Gegenstand verdient offenbar allgemeine Erwägung.

ausschliefsenden Begriff von irgend einer *bestimmten* geometrischen Gestalt, und lassen folglich die Vorstellung von der Ebene völlig in Ungewifsheit. Gleichwohl ist die Ebene das Constructions-Feld fast der gesammten übrigen Geometrie; und gleich der erste Satz des ersten Buchs des *Euklides* bedarf eines bestimmten und festen Begriffs der Ebene, wenn er nicht, nebst fast Allem, was folgt, im Dunkel und im Ungewissen schweben soll. Es wäre daher zu erwarten gewesen, dafs man sich um die Theorie der Ebene wenigstens *eben* so angelegentlich und vielfältig bemüht hätte, als um die der Parallelen. Allein dies ist nicht geschehen. Die Ursache mag sein, weil die Parallelen (die übrigens auch ihrerseits den Begriff der Ebene unumgänglich nöthig haben) ein viel einfacherer Gegenstand sind, als die Ebene: ein Gegenstand, der nicht allein vielseitigeren Bemühungen zugänglich ist, sondern bei welchem auch die Nothwendigkeit der weiteren Aufklärung mehr in die Augen springt. In neuerer Zeit hat man gesagt: *eben* sei eine Fläche, wenn die geraden Linien, welche je zwei beliebige in der Fläche liegende Puncte verbinden, ganz in der Fläche liegen. Gleichzeitig hat man die gerade Linie für den kürzesten Weg von einem Puncte zum andern erklärt. Diese Definition der geraden Linie giebt aber noch weniger eine bestimmte Vorstellung von der *Gestalt* des Gegenstandes, als selbst die Euklidische, und scheint ihr daher auch nicht vorzuziehen. Die Definition der Ebene aber, obgleich sie allerdings bestimmter ist, als die Euklidische, schliefst, wenn man sie näher betrachtet, so auffallend Lehrsätze in sich, dafs sie, aus eben den Ursachen, aus welchen die Euklidische Begründung der Parallelen-Theorie nicht zugelassen werden mag, noch viel weniger dürfte zugestanden werden können. Denn zieht man z. B. in der Ebene, in welcher das Dreieck *ABC* Fig. 1. liegt, durch eine der Ecken *A* und durch einen beliebigen Punct *D* der gegenüberliegenden Seite die gerade Linie *AD*, so soll dieselbe, der Erklärung der Ebene zu Folge, ganz in der Ebene des Dreiecks liegen: alle Puncte der Ebene in dieser Linie sind also völlig bestimmt. Zieht man nun hierauf aus einer zweiten Ecke *B* des Dreiecks eine gerade Linie *BE* nach irgend einem Puncte *E* der gegenüber liegenden Seite *AC*, so soll auch diese Linie eben so wohl ganz in der Ebene liegen, und alle Puncte der Ebene in *dieser* Linie sind ebenfalls völlig bestimmt. Beides zusammen: dafs *AD* und *BE* ganz in der Ebene liegen, ist also offenbar nur dann möglich, wenn *AD* und *BE*, etwa in *F*, sich *schneiden;* denn sonst wäre von *zwei* Ebenen, nicht von *einer* die Rede. Dafs nun *AD* und *BE* nothwendig sich

schneiden, nicht etwa *BE* unter oder über *AD* hinwegläuft, folgt aus sich selbst nicht. Man könnte zwar, wie Einige zu Gunsten derjenigen Euklidischen Erklärungen thun, welche Lehrsätze in sich schliefsen, die Definitionen in der Geometrie überhaupt nur *Wort-Erklärungen* sein lassen und gestatten, dafs sie Lehrsätze vorausnehmen, die erst später bewiesen werden. Allein dann müfste hier *wenigstens später bewiesen werden,* dafs *BE* die *AD* nothwendig schneidet; welches gleichwohl nirgend geschieht. Die neuere Definition der Ebene scheint also noch weniger annehmlich, als die Euklidische.

Da nun die Euklidische und die erwähnte neuere Definition der Ebene die am meisten gangbaren und vielleicht auch fast die einzigen sind, welche mit einiger Consequenz in das übrige Lehrgebäude der Geometrie eingeführt wurden, so scheint es, dafs die möglichste Vervollkommnung der *Theorie der Ebene* noch rückständig sei. Der Nothwendigkeit einer solchen Vervollkommnung für die gesammte Geometrie ist oben gedacht worden; das Interesse derselben aber ist unstreitig grofs genug, da die Eigenschaft, welche die Mathematik und in ihr die Geometrie sich beilegt, einer von den wenigen Theilen der menschlichen Erkenntnisse zu sein, welche *vollkommene* Sicherheit und Wahrheit gewähren, zweifelhaft wird, sobald die Sätze und Begriffe, auf welche sie sich stützt, wanken.

Indem nun hier einige Bemühungen um die Theorie der Ebene mitgetheilt werden sollen, bemerke ich zunächst, dafs ich nicht allein keineswegs die Anmaafsung hege, zu meinen, es sei mir gelungen, tiefer als so viele Andere in einen Gegenstand einzudringen, den selbst *Euklides* Scharfsinn nicht zu ergründen vermochte, sondern dafs ich auch die Überzeugung habe, es sei und werde für immer völlig *unmöglich* bleiben, die Begründung der Elemente der Geometrie, eben wie auch derjenigen der Analysis, zur *Vollkommenheit* zu bringen. Nach meiner Meinung, die ich schon sonst irgendwo ausgesprochen habe, ist alle menschliche Erkenntnifs zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die zwar weiter und weiter, aber doch nur bis in endliche Fernen hinausgerückt werden können, während ihr Umfang zwischen zwei Unendlichen liegen bleibt, die nicht zu durchdringen sind. Aus verborgenen Tiefen heraus entwickeln sich die Elemente einer Vernunft-Wissenschaft, z. B. der Mathematik, und in eine unendliche Höhe hinauf streben sie. Was in der tieferen Tiefe und in der höheren Höhe liegt, bleibt für immer verborgen. Alles was sich hier, in der Geometrie, so wie in der

Analysis thun läfst, ist: die in sich vollkommen sicheren Schlufsfolgen auf möglichst einfache Definitionen und Grundsätze zurückzuführen, eben nach dem Muster jenes grofsen Geometers, des ***Euklides,*** dessen ***Consequenz*** noch von keinem andern Forscher in diesem Gegenstande übertroffen wurde. Alle Vervollkommnung, die möglich ist, besteht nach meiner Meinung darin: Erklärungen und Grundsätze aufzustellen, die am meisten geignet sein dürften, unmittelbar bestimmte Vorstellungen und Erkenntnisse zu erzeugen, oder zu erregen.

Nach dieser Ansicht werde denn natürlich auch hier verfahren; aber nach ihr ist, wie es scheint, noch Einiges für die Theorie der Ebene zu thun *möglich.* Es scheint, man könne, wie das Folgende zeigen wird, die Schwierigkeit bis auf Erklärungen und Grundsätze reduciren, die nicht widerstrebend sind, und die zugleich den wichtigen Umstand für sich haben, dafs auch ***Euklid*** selbst sie ***neben*** seiner Erklärung der Ebene gestattet.

Aufser den beiden oben erwähnten Erklärungen der Ebene, der Euklidischen und der neueren, die, so viel ich mich erinnere, von ***Robert Simson*** ist, giebt es noch eine dritte, aus der neuesten Zeit, meines Wissens von ***Fourier*** herrührend, die, obgleich, so viel mir bekannt, noch nicht in die Geometrie eingeführt, ihrer grofsen Klarheit und Bestimmtheit wegen, die gröfste Aufmerksamkeit verdient. Derselben zufolge wird die ***Ebene*** von der Gesammtheit aller der geraden Linien gebildet, die, durch einen und denselben Punct einer geraden Linie im Raume gehend, auf dieser senkrecht stehen. Diese Erklärung ist unstreitig ungemein bestimmt und deutlich, und ich habe mich deshalb angelegentlich und lange bemüht, zu der consequenten Verbindung derselben mit den Sätzen, worauf es ankommt, zu gelangen; allein es ist mir mit aller Mühe nicht gelungen, und ich habe an ihre Stelle eine andere setzen müssen, aus welcher auch weiter gefolgert werden kann, dafs die Fouriersche Fläche mit der postulirten Ebene identisch ist; worauf dann die Fouriersche Fläche allerdings zu der weiteren Entwickelung der Theorie der Ebene nothwendig ist uud, vereint mit der definirten Ebene, das weiter Nöthige leistet; wie sich solches aus dem unten folgenden Vortrage ergeben wird.

Da die Theorie der ***geraden Linie*** zu derjenigen der Ebene unumgänglich erforderlich ist, und die vorhandenen, wie bemerkt, nicht genügend scheinenden Erklärungen der geraden Linie zu Dem, was daraus zu folgern war, auf keine Weise ausreichten, so war zunächst eine andere Erklärung

der geraden Linie nothwendig. Zu dieser ist hier diejenige angenommen, welche sich im wesentlichen schon in meinem Lehrbuche der Geometrie vom Jahre 1826 findet. Lange vor, so wie nach Erscheinung dieses Buchs, habe ich sorgfältig und mit vollkommenster Selbstverleugnung alle Bemerkungen erwogen, die man darüber und dagegen hat machen wollen; desgleichen habe ich alle andern Erklärungen, die mir bekannt geworden sind, damit verglichen; es hat mir aber nicht gelingen wollen, zu erkennen, dafs meine Erklärung *deshalb* zu verwerfen sei, weil irgend eine andere ihr vorgehe; ich mufs also bei derselben stehen bleiben, bis eine bessere an ihre Stelle tritt. Ein beschwerlicher, fast entmuthigender Umstand macht sich hiebei freilich bemerklich. Da nemlich hier von Dingen *ausgegangen* werden mufs, von welchen sich nichts mehr *beweisen* läfst, so kann Jedermann gleich die ersten Anfänge durch die blofsen Worte: es gefalle ihm nicht, und dann mit den Anfängen alles Übrige über den Haufen werfen. Allein, wie es scheint, läfst sich verlangen, dafs man wenigstens die fernere Entwicklung gestatte und erst hernach, nicht von vorn herein, urtheile, ob das Ganze, mit seinen Anfängen, einige Berücksichtigung verdiene, oder nicht.

Rücksichtlich der Demonstrations-Methode, welche die hier folgende Abhandlung beobachten wird, ist zu bemerken, dafs die Regel derselben von derjenigen: nur erst dann von einer Figur etwas zu demonstriren, nachdem gezeigt worden, wie dieselbe *durch die gerade Linie und den Kreis,* das heifst, durch Lineal und Cirkel *gezeichnet* werden kann, abweichen wird: auf die Weise, wie es in meinem Lehrbuche der Geometrie und von Andern geschehen ist. Anstatt zu zeigen, wie eine Figur *gerade durch Cirkel und Lineal* gezeichnet werden könne, wird da, wo die *Existenz* der Figur zweifelhaft sein könnte, *bewiesen* werden, dafs sie *möglich* ist. Dieses ist aber auch offenbar zu dem vorgesetzten Zwecke hinreichend, und es ist keinesweges nöthig, vorher, ehe man weiter geht, zu wissen, wie die folgende Figur gerade mit Hülfe von Cirkel und Lineal hervorgebracht werden könne; um so weniger, da die Wahl dieser Zeichnungs-Werkzeuge sogar mehr oder weniger willkürlich ist. *Mascheroni* z. B. hat gezeigt, dafs man die Figuren der Elementar-Geometrie durch den Kreis allein, *Steiner,* dafs man sie durch gerade Linien und einen einzelnen festen Kreis construiren könne. Also ist die Bedingung, dafs man gerade den Kreis und gerade Linien zur Zeichnung anwende, keinesweges organisch *nothwendig.* Auch scheint es besser, diejenigen Lehrsätze, welche bei der *Construction* der Figuren in den Auf-

gaben *enthalten* sein können, frei hervortreten zu lassen, als in Aufgaben sie zu verstecken. Jedenfalls kann man, ohne die Strenge der Beweise und die Folgerichtigkeit der Sätze im Geringsten zu vermindern, wie vorhin bemerkt, von der Constructions-Methode durch Kreis und gerade Linien unbedenklich abgehen. Hier *mufste* es nothwendig geschehen, da die Eigenschaften des Constructions-*Feldes,* der Ebene, des Reifsbrettes für die Zeichnung, nicht vorausgesetzt werden, sondern gerade *diese* erst demonstrirt werden sollten.

Schliefslich wird es kaum nöthig sein, um Entschuldigung zu bitten, dafs hier, an diesem Orte, von einem Gegenstande gesprochen werden soll, der den ersten *Elementen* der Mathemathik angehört. Von diesen ersten Elementen ist die *Begründung* eine gewifs nicht minder schwierige Aufgabe, als die weitere Entwickelung der complicirtesten Sätze. Jene strebt in die Tiefe, diese in die Höhe: und Tiefe und Höhe sind gleich unbegrenzt und dunkel.

Ich beginne mit der Erklärung *der geraden Linie* und mit einigen Sätzen von derselben, die zu dem Folgenden nothwendig sind. Darauf wird das Nöthige von den *Winkeln,* nebst der Erklärung der *Ebene,* und dann werden die Sätze folgen, die auf die Eigenschaften derselben führen dürften. Der Vortrag wird in die für die Geometrie passendste Form von Lehrsätzen, mit Beweisen, Erklärungen, Zusätzen u. s. w. gebracht, dazwischen aber wird bemerkt werden, wie die Zusammensetzung der Schlüsse fortschreite.

---

§. I.

1. *Erklärung.* Wenn, während zwei Puncte einer Linie fest sind, alle ihre übrigen Puncte an demselben Ort im Raume bleiben, wie auch die Linie im Raume durch die beiden Puncte gelegt werden mag, so heifst sie *gerade.*

2. *Lehrsatz.* Es giebt *nur eine* gerade Linie durch zwei feste Puncte im Raume.

Beweis. Gäbe es eine zweite, von der ersten verschiedene gerade Linie, so würden, weil dieselbe auch in die Lage der ersten und diese in die Lage der zweiten müfste gebracht werden können, die sonst aufserhalb der beiden festen Puncte liegenden Puncte der beiden Linien *verschiedene* Orte im Raume einnehmen; welches der Erklärung der geraden Linie zuwider ist.

3. ***Lehrsatz.*** Gerade Linien, die durch die nemlichen zwei Puncte im Raume gehen, schliefsen keinen Raum ein, sondern fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen.

Beweis. Sie können, nach (1.), nicht verschiedene Orte im Raum einnehmen, wie sie auch durch die zwei festen Puncte gelegt werden mögen.

4. ***Lehrsatz.*** Zwei gerade Linien können nur in einem einzigen Puncte sich schneiden.

Beweis. Hätten sie auch nur zwei Puncte gemein, so würden sie schon in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen (3.).

5. ***Lehrsatz.*** Wenn zwei gerade Linien AB und AC (Fig. 2.) durch einen und denselben Punct A gehen, aufserdem aber jede durch einen andern Punct B und C aufserhalb der andern Linie geht, so haben sie weiter keinen Punct gemein.

Beweis. Hätten sie einen zweiten Punct mit einander gemein, so würden sie in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen (3.), und dies geschieht nicht, weil z. B. AC namentlich durch den Punct C geht, der nach der Voraussetzung nicht in der AB liegt.

6. ***Erklärung.*** Wenn in der geraden Linie AB (Fig. 3.) die beiden Puncte A und B, und in der geraden Linie CD die beiden Puncte C und D so liegen, dafs, wenn man C in A und die Linien selbst in einander legt, D in B fällt, so also, dafs dann die beiden Linien sich gänzlich decken, so heifsen sie *gleich lang.*

7. ***Anmerkung.*** *Gleich lange* gerade Linien unterscheiden sich *durch Nichts* von einander, und sind also einander vollkommen gleich. Denn, wenn ein Endpunct der einen in den Endpunct der andern, und die Linien selbst in einander gelegt werden, so fällt auch der andere Endpunct der ersten in den andern Endpunct der zweiten, und folglich decken sich die Linien gänzlich.

8. ***Anmerkung.*** Da aber gerade Linien auch in einander fallen können, ohne gleich lang zu sein, nämlich die kürzere ganz in die längere, weil jene zwei Puncte mit dieser gemein haben kann: so ist es die *Länge,* wodurch sich gerade Linien von einander unterscheiden.

9. ***Anmerkung.*** Eine gerade Linie kann mehrmals in eine zweite, und mehrmals, in verschiedener Zahl, in eine dritte fallen. Die Länge der zweiten und dritten verhält sich dann, wie die Zahlen, die ausdrücken, wie oft die erste Linie in der zweiten und in der dritten enthalten ist.

10. *Erklärung.* Wegen (9.), und da zwischen zwei Puncten nur eine gerade Linie möglich ist (2.), dient die Gerade zum Maafse der *Entfernung* zweier Puncte von einander.

§. II.

Bei den weiter folgenden Sätzen kommt vor, dafs *gleiche Hälften* einer geraden Linie vorausgesetzt werden müssen. *Euklides* beweiset die *Existenz* solcher Hälften dadurch, dafs er eine gerade Linie *durch Zeichnung* halbiren lehrt. Er bedarf dazu des Kreises und zweier Sätze von der Congruenz der Dreiecke. Da diese Hülfsmittel hier, wegen des noch fehlenden Begriffs der Ebene, nicht zu Gebote stehen, so ist ein anderer Beweis der Existenz *gleicher Hälften* einer geraden Linie nothwendig. Es läfst sich folgender geben.

11. *Lehrsatz.* In einer geraden Linie AB (Fig. 4*a.*) giebt es zwischen den Endpuncten A und B stets einen Punct C, der *gleich weit* von den beiden Endpuncten A und B entfernt ist, und welcher folglich die Länge AB in zwei *gleiche Hälften* AC und BC theilt.

Beweis. I. Es sei D ein *beliebiger* Punct in AB, *zwischen* A und B. Ist AD nicht *gleich* DB, also D nicht schon der Halbirungs-Punct, so wird AD nothwendig entweder gröfser, oder kleiner als CB sein. Es sei kleiner. Alsdann wird AD jedenfalls *wenigstens* zweimal in AB enthalten sein. Ist es nicht *öfter* in AB enthalten, so wird, wenn $DR = AD$ ist, ein Stück RB übrig bleiben, welches *kleiner* als AD und folglich jedenfalls wenigstens zweimal in AB enthalten ist.

II. Es sei nun weiter K (Fig. 4*b.* und 4*c.*) der willkürlich angenommene Punct, und AK sei kleiner als KB: so kann die Zahl der AK gleicher Stücke, welche in AB *mindestens* enthalten sind, nur entweder *gerade,* oder *ungerade* sein. Das übrig bleibende Stück RB aber wird nothwendig immer *kleiner* als AK, und kann auch Null sein, aber *nicht gröfser,* als AK.

III. Die Zahl n der gleichen Theile AK, KL, LM, MN, NP, PR (Fig. 4*b.*) sei erstlich *gerade,* so dafs also $\frac{1}{2}n$ eine *ganze* Zahl ist, und $AM = MR$ sei gleich $\frac{1}{2}n$ solchen Theilen; auch werde BX gleich MR oder AM gemacht. Alsdann ist $MX = RB$ und folglich MX *nicht gröfser* als AK.

IV. Die Zahl n der gleichen Theile BK, KL, LM, MN, NR (Fig. 4*c.*) sei zweitens *ungerade.* Alsdann wird ein $n+1^{\text{ter}}$ Theil $RS = AK$

nothwendig über B hinausfallen, und da RB nicht kleiner sein kann, als Null, so kann BS *nicht gröfser* sein, als AK. Nun ist $n+1$ nothwendig eine *gerade*, also $\frac{1}{2}(n+1)$ eine *ganze* Zahl. Es sei $AM = MS = \frac{1}{2}(n+1)$ Theilen, jeder gleich AK, und es werde $BX = MS = AM$ gemacht, so wird $XM = BS$ und folglich XM *nicht gröfser* als AK sein.

V. Da also in (Fig. 4*b*.) $AM = BX$ (III.) und in (Fig. 4*c*.) ebenfalls $AM = BX$ (IV.), in beiden aber MX nicht gröfser ist, als AK, auch AK selbst, wo auch der Punct K zwischen A und B liegen mag, jedenfalls wenigstens zweimal in AB enthalten ist (I.): so folgt, dafs es *in allen Fällen* zwei Puncte M und X *zwischen* A und B giebt, deren Entfernung von einander, während der eine M so weit von A als der andere X von B absteht, *wenigstens* 2mal in AB enthalten ist.

VI. Deshalb wird es aber nun weiter, eben wie zwischen A und B, auch zwischen M und X nothwendig zwei neue Puncte M_1 und X_1 geben, die, während sie gleich weit von den Endpuncten M und X und folglich auch von A und B abstehen, nämlich so, dafs $MM_1 = XX_1$ und folglich auch $AM_1 = AX_1$ ist, von einander nie weiter entfernt sind, als dafs ihre Entfernung M_1X_1 von einander *wenigstens* 2mal in MX und folglich wenigstens 4mal in AB enthalten ist.

Gleicher Weise wird es zwei Puncte M_2 und X_2 geben, die von A und B gleich weit entfernt sind, während M_2X_2 *wenigstens* 2mal in M_2X_2, also wenigstens 8mal in AB enthalten ist.

Wird das Verfahren $m$mal wiederholt, so wird man nothwendig zu zwei Puncten M_m und X_m gelangen, die zwischen A und B so liegen, dafs $AM_m = BX_m$, während M_mX_m wenigstens 2^mmal in AB enthalten ist.

Da aber die Gröfse der Zahl m unbeschränkt ist, so gelangt man zu zwei Puncten, die, während der eine von A eben so weit entfernt ist, als der andere von B, von einander um weniger als jede gegebene Länge abstehen. Solche zwei Puncte fallen aber in *einen* Punct zusammen, und dieser Punct ist folglich von A und B gleich weit entfernt und halbirt mithin AB.

§. III.

Wir kommen nun zu der Definition des *Winkels*. Die Euklidische Definition pafst auch für die gegenwärtige Entwickelung, jedoch ohne dafs der Ebene darin gedacht werde. Es kann also folgende Definition gegeben werden; welcher dann die nächsten Sätze folgen können.

12. *Erklärung.* Die Neigung zweier geraden Linien im Raume, die sich treffen, ohne in einander zu fallen, heifst, am Durchschnittspuncte, *Winkel.* Also die Neigung von *AC* gegen *BC* (Fig. 5.), von *BC* gegen *EC* u. s. w., heifst *Winkel.* Die sich schneidenden Linien, welche den Winkel begrenzen, heifsen dessen *Schenkel;* ihr Durchschnittspunct heifst *Scheitel.*

Je zwei Winkel α und β, α und δ etc., zwischen zwei im Raume sich schneidenden geraden Linien, die neben einander, also an der nämlichen Seite der einen geraden Linie liegen, heifsen *Nebenwinkel.*

Je zwei Winkel α und γ, δ und β etc., zwischen zwei im Raume sich schneidenden geraden Linien, die nicht an einander, also an entgegengesetzten Seiten der sich schneidenden Linien liegen, heifsen *Scheitelwinkel.*

13. *Lehrsatz* A. Wenn der Scheitel und der eine Schenkel eines Winkels in den Scheitel und den einen Schenkel eines andern Winkels gelegt werden, und der andere Schenkel des ersten Winkels kann dann in den andern Schenkel des andern Winkels gebracht werden, so sind die Winkel einander *gleich.*

Beweis. Winkel, die sich decken, sind gleich.

B. Wenn der Scheitel und der eine Schenkel eines Winkels in den Scheitel und den einen Schenkel eines *gleichen* Winkels gelegt werden, so mufs der andere Scheitel des ersten Winkels in den andern Scheitel des andern Winkels gebracht werden können.

Beweis. Gleiche Winkel decken sich.

14. *Lehrsatz.* Die *Nebenwinkel* zweier gleichen Winkel sind ebenfalls gleich. Z. B. wenn $ACB = FGH$ (Fig. 6.), so ist auch $ACD = FGL$.

Beweis. Es werde G in C und GH in CB gelegt, so mufs GF in CA gebracht werden können, weil nach der Voraussetzung die Winkel ACB und FGH gleich sind (13. B.). Es sei $GH = CB$, so fällt mit G in C, H in B. Also fällt die gerade Linie HGL in ihrer ganzen Ausdehnung in die BCD (2.). Mithin fällt auch der andere Schenkel LG des Nebenwinkels FGL zu FGH in den andern Schenkel DC des Nebenwinkels ACD zu ACB, und folglich sind auch die Nebenwinkel FGL und ACD gleich (13. A.).

15. *Lehrsatz.* Eine gerade Linie, die zwei Puncte in den Schenkeln eines Winkels verbindet, kann nicht durch den Scheitel des Winkels gehen.

Beweis. Ginge die gerade Linie AD (Fig. 7.) durch C, so hätte sie

zwei Puncte *A* und *C* mit *AB* gemein, und fiele dann ganz in *AB* (3.). Es läge also auch der Punct *D* in *AB*, und folglich fiele *CD* mit *CB* zusammen, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil alsdann *ACD* kein Winkel wäre (12.).

§. IV.

Euklides beweiset die Gleichheit von *Scheitelwinkeln* mit Hülfe des Begriffs von zwei rechten Winkeln an einer geraden Linie. Sie kann aber auch aus der blofsen Congruenz wie folgt bewiesen werden.

16. *Lehrsatz.* Scheitelwinkel sind einander gleich. Z. B. in (Fig. 6.) ist $ACB = DCE$.

Beweis. Es seien *LH* und *FK* zwei andere Geraden, die sich in *G* so schneiden, dafs $FGH = ACB$ ist. Alsdann sind auch, nach (14.), die Nebenwinkel *LGF* und *DCA* gleich.

Man mache $AC = BC = DC = EC = FG = HG = LG = KG$, und lege *G* in *C*, *GL* in *CA*, so fällt *L* in *A*, weil $GL = CA$ sein soll, und da *GL* nnd *CA* zwei Puncte gemein haben, auch *GH* in *CE* und *H* in *E*. Es kann aber, nachdem *GL* in *CA* gelegt worden ist, *GF* in *CD* gebracht werden, weil die Winkel *LGF* und *DCA*, wie vorhin bemerkt, gleich sind. Dann aber fällt *F* in *D*, indem $GF = CD$ ist. Es fällt also nun *H* in *E*, *E* in *D* und *G* in *C*; also fallen *F*, *G*, *H* in *D*, *C*, *E*, und folglich ist *FGH* dem Winkel *DCE* gleich.

Nach der Voraussetzung war *FGH* dem Winkel *ACB* gleich: also sind die Scheitelwinkel *DCE* und *ACB* einem und demselben Winkel *FGH* und folglich einander gleich.

§. V.

Es müssen jetzt einige Sätze von Dreiecken folgen, die noch ohne den Begriff der Ebene Statt finden, nämlich:

17. *Erklärung.* Die Figur *ABC* (Fig. 8.), von drei geraden Linien gebildet, die im Raume zu zwei- und zweien sich schneiden, soll *Dreieck* heifsen. Die geraden Linien zwischen ihren eigenen Durchschnittspuncten sollen *Seiten*, die Winkel, welche sie einschliefsen, *Winkel* des Dreiecks heifsen.

18. *Lehrsatz.* Gleiche Dreiecke haben gleiche Seiten und gleiche Winkel.

Beweis. Sie decken sich; folglich fallen ihre Seiten und deren Durchschnittspuncte in einander, und folglich sind die Seiten des einen Dreiecks so lang, als die Seiten des andern, und die Winkel des einen sind den Winkeln des andern gleich.

19. ***Lehrsatz.*** Wenn zwei Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC (Fig. 9.) einzeln so lang sind, als zwei Seiten DE und DF eines andern Dreiecks DEF, und der eingeschlossene Winkel A ist zugleich dem Winkel D gleich, so sind die Dreiecke selbst und folglich auch ihre übrigen Winkel und die dritten Seiten einander gleich (18.).

Beweis. Man lege A in D und AB in DE: so fällt B in E, weil $AB = DE$ sein soll (7.). Desgleichen fällt AC in DF, weil $A = D$ sein soll (13. B.), und C in F, weil $AC = DF$ sein soll (7.). Nun ist zwischen den beiden Puncten E und F *nur eine* gerade Linie möglich (2.): also fällt auch BC in EF, und folglich decken sich die Dreiecke und sind mithin einander gleich oder congruent.

20. ***Lehrsatz.*** Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 10.) zwei Seiten AB und AC einander gleich sind, so sind auch die denselben gegenüber liegenden Winkel C und B einander gleich.

Erster Beweis. Es werde, während der Punct A an seiner Stelle bleibt, AC in den Ort im Raume gebracht, den AB einnimmt, so wird C in B fallen, weil $AC = AB$ sein soll. Ferner wird AB in den Ort im Raume gebracht werden können, den AC einnimmt, weil der Winkel A sich selbst gleich ist (13. B.). Auch wird B in C fallen, weil $AB = AC$ sein soll. Da aber C in B und B in C fällt, so wird auch die ganze Linie BC in CB fallen (2.). Also wird der Scheitel C des Winkels ACB, nebst seinen beiden Schenkeln CA und CB, in den Scheitel B des Winkels ABC nebst seinen beiden Schenkeln BA und BC fallen, und folglich müssen die Winkel C und B einander gleich sein.

Zweiter Beweis. Man nehme willkürlich einen Punct E in AB an, und mache $AF = AE$: so ist in den Dreiecken FAB und EAC, $AB = AC$, $AF = AE$ und $A = A$. Also sind die Dreiecke einander gleich (19.), und folglich ist $BF = EC$ und $AEC = AFB$; folglich sind auch die Nebenwinkel BEC und BFC gleich (14.). Desgleichen ist $BE = FC$. Mithin ist in den Dreiecken BEC und BFC, $BE = FC$, $BF = EC$ und $BEC = BFC$. Also sind die Dreiecke gleich (19.), und folglich ist $B = C$.

§. VI.

Nunmehr wird die Definition der Ebene folgen, aber derselben ein Satz vorausgehen müssen, welcher beweiset, dafs die Fläche, welche *Ebene* genannt werden soll, *möglich* ist. Darauf werden sogleich einige Sätze von der Ebene selbst hinzugefügt werden.

21. ***Lehrsatz.*** Durch jede gerade Linie BC (Fig. 11.) und durch einen beliebigen Punct A im Raume, aufserhalb derselben, ist immer eine Fläche ***möglich,*** in welcher ohne Ausnahme alle die geraden Linien dAd_1, eAe_1, fAf_1 etc. in ihrer ganzen Ausdehnung liegen, die durch den Punct A und durch die gerade Linie BC gehen.

Beweis. Alle die geraden Linien AD, AE etc., gehen durch den Punct A, und jede geht durch einen ***andern*** Punct der Linie BC; denn zwei gerade Linien durch A und durch ***denselben*** Punct von BC würden in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen (3.). Die geraden Linien dAd_1, eAe_1 etc. können also keinen Punct weiter, als A gemein haben (5.). Kein Punct einer durch A, durch BC und durch die sämmtlichen geraden Linien dAd_1, eAe_1 gehenden Fläche wird also von diesen Linien ***mehr als einmal*** getroffen, aufser dem Punct A selbst. Eine Fläche durch A und durch BC, in welcher sämmtliche Linien dAd_1, eAe_1 etc. liegen, ist also allemal ***möglich.***

22. ***Erklärung.*** Eine Fläche, durch einen beliebigen Punct A (Fig. 11.) und durch eine beliebige gerade Linie BC im Raume gehend, in welcher alle durch A und BC gehende gerade Linien dAd_1, eAe_1 etc. in ihrer ganzen Ausdehnung liegen, was nach (21.) allemal möglich ist, soll ***Ebene*** heifsen. Der Punct A soll ***bestimmender Punct,*** die gerade Linie BC ***bestimmende Gerade,*** und die verschiedenen durch A und BC gehenden geraden Linien dAd_1, eAe_1 etc. sollen ***erzeugende Geraden*** der Ebene heifsen. Ferner heifse eine gerade Linie ***„mit zwei andern sich schneidenden in einer und derselben Ebene liegend"*** wenn sie durch den Durchschnittspunct jener beiden und zugleich durch irgend einen Punct irgend einer Geraden geht, die jene beiden schneidet. Z. B. EA (Fig. 11.) liegt mit DA und GA in einer und derselben Ebene, wenn sie, etwa in E, irgend eine Gerade DG schneidet, die durch DA und GA geht.

Bei der Bezeichnung einer Ebene durch Buchstaben oder Figuren soll der bei dem ***bestimmenden Puncte*** der Ebene stehende Buchstab immer ***zwischen*** die beiden Buchstaben gesetzt werden, welche zwei Puncte der ***bestimmenden Linie*** bezeichnen. Also ist z. B. ***die Ebene*** DAG (Fig. 11.) diejenige, deren bestimmender Punct A und deren bestimmende Linie DG ist.

Diese Definition der ***Ebene*** gewährt den wesentlichen Vortheil, dafs durch sie überall, wo drei einander in einem und demselben Puncte schneidende gerade Linien zugleich durch eine und dieselbe vierte gerade Linie gehen, wie z. B.: die DA, EA, GA (Fig. 11.), die sich in A schneiden,

4*

während sie alle drei durch die gerade Linie *BC* gehen, sogleich bestimmt wird, dafs diese Linien *in einer und derselben Ebene liegen*. Da ein solches Zusammensein dreier gerader Linien, die eine vierte schneiden, wie sich zeigen wird, sogleich wie man weiter geht und immerfort in den Demonstrationen vorkommt, so ist dieser Vortheil wesentlich. Wollte man von der *Fourier*schen Definition der Ebene ausgehen, so würde man jenes Vortheils entbehren; es müfste erst *bewiesen* werden, dafs drei in einem und demselben Puncte sich schneidende gerade Linien, wenn sie auf einer festen Axe im Raume, die durch den Schneidepunct geht, senkrecht sind, nothwendig alle drei zugleich durch eine vierte gerade Linie gehen; was vorbereitende Sätze erfordert, deren Beweis, eben ohne die gegenwärtige Definition der Ebene, nicht zu gelingen scheint. *Hier* mufs natürlich umgekehrt bewiesen werden, dafs drei in einem und demselben Puncte sich schneidende gerade Linien, wenn sie zugleich durch eine und dieselbe vierte gerade Linie gehen, auf einer festen Axe im Raume, die durch den Durchschnittspunct der drei Linien geht, alle drei zugleich senkrecht sein können; was sich auch thun läfst und unten geschehen wird.

23. *Lehrsatz.* Durch eine gerade Linie im Raume und durch einen Punct aufserhalb derselben kann *nur eine* Ebene gehen.

Beweis. Gesetzt, durch *BC* und durch *A* (Fig. 11.) könnte noch eine zweite Ebene gehen: so sei *AE* eine der erzeugenden Geraden der ersten Ebene, die *nicht* in der zweiten liegt. Alsdann müfste, weil auch die zweite Ebene, und folglich auch eine ihrer erzeugenden Linien durch *A* und *E* gehen mufs, eine zweite gerade Linie durch *A* und *E* möglich sein, die nicht mit der erzeugenden Geraden der ersten Ebene zusammenfällt. Da dieses nicht möglich ist (2.) und das Gleiche von jeder andern erzeugenden Geraden gilt, so müssen nothwendig *alle* erzeugenden Geraden der beiden Ebenen zusammenfallen, und daher giebt es, durch den bestimmenden Punct und die bestimmende Gerade gehend, *nur eine* Ebene.

24. *Lehrsatz.* Durch zwei gerade Linien, die sich schneiden, wie *AD* und *AG* (Fig. 11.), kann immer *wenigstens eine* Ebene liegen.

Beweis. Es gehe durch *D* und *G* die gerade Linie *BC*, und es liege durch *DG* und *A* eine Ebene, so geht dieselbe auch durch die beiden geraden Linien *AD* und *AG*.

§. VII.

Jetzt wird ein Grundsatz eingeschaltet werden müssen, der zur weiteren Untersuchung der Eigenschaften der Ebene nothwendig ist. Es ist folgender.

25. ***Grundsatz.*** Wenn drei gerade Linien, die in einem und demselben Puncte sich treffen, in einer und derselben Ebene liegen, so ist der Winkel zwischen den beiden äufsern Linien so grofs, als die Winkel zwischen den beiden äufsern und der innern Linie zusammengenommen. Auch kann jeder der beiden letzten Winkel, von Null an bis zur Gröfse des einschliefsenden Winkels, *stetig* wachsen. Also z. B. in Fig. 11. ist *DAG* so grofs, als die beiden Winkel *EAG* und *DAE* zusammengenommen; und ein innerer Winkel, wie *EAG,* kann jede mögliche Gröfse haben, von Null an bis *DAG.*

Euklid nimmt diesen Grundsatz von Winkeln *stillschweigend* ebenfalls an, bezogen auf sein allgemeines drittes Axiom: „Gleiches von Gleichem hinweggenommen, läfst Gleiches." Denn, nachdem z. B. in der zu dem 5ten Satze des ersten Buches gehörigen Figur, hier Fig. 12., bewiesen worden, dafs die Winkel *ABG* und *ACF* und die Winkel *CBG* und *BCF* gleich sind, wird, mit Berufung auf den 3ten Grundsatz, behauptet, dafs $ABC = ACB$ ist. Also wird angenommen, dafs die Winkel *ABC* und *CBG* *zusammen* so grofs sind, als der Winkel *ABG,* und die Winkel *ACB* und *BCF* *zusammen* so grofs, als der Winkel *ACF,* von welchem bewiesen worden, dafs er dem Winkel *ABG* gleich ist. Auch enthält diese Voraussetzung einschliefslich den *zweiten* Theil des gegenwärtigen Grundsatzes; denn da zu einem Winkel ein anderer, so klein als man will, hinzugethan werden kann, so folgt, wenn man, nach *Euklides,* den entstehenden Winkel der *Summe* des ursprünglichen und des hinzugefügten Winkels gleich setzt, dafs ersterer *stetig* wachsen kann.

Es schliefst sich nun an den Grundsatz zunächst folgender Satz.

26. *Lehrsatz.* Von jedem der beiden Winkel, in welche eine gerade Linie, die mit den Schenkeln eines Winkels in einer und derselben Ebene liegt, den Winkel theilt, ist der Nebenwinkel des einen nothwendig gröfser, als der andere Winkel. Z. B. wenn *EC* (Fig. 13.) durch *BF* geht und also den Winkel *BCF* in zwei andere *BCE* und *ECF* theilt, so ist der Nebenwinkel *ECD* des einen Winkels *BCE* nothwendig gröfser als der andere Winkel *ECF.*

Beweis. Der Nebenwinkel *ECD* kann von den Dreien nur Eins sein: entweder *gleich* dem Winkel *ECF,* oder *kleiner,* oder *gröfser.* Er kann aber nicht *gleich* *ECF* sein, denn sonst müfste *CD* in *CF* gebracht werden

können; was nicht angeht, weil die gerade Linie *BD*, nach *BF* gebracht, nicht durch *C* gehen kann (15.). Er kann auch nicht *kleiner* als *ECF* sein, denn sonst wäre er, weil z. B. der Winkel *ECG* von Null bis *ECF* *stetig* wachsen und folglich *jede* Gröfse haben kann, die *kleiner* ist als *ECF* (25.), irgend einem Winkel *ECG* *gleich*, dessen Schenkel *CG* durch *BF* geht; was ebenfalls nicht möglich ist, weil die gerade Linie *BD*, nach *BG* gebracht, wiederum nicht durch *C* gehen kann (15.). Also kann *ECD* *nur gröfser* sein, als *ECF*.

§. VIII.

Es folgen nun wieder einige Sätze, die zur ferneren Entwickelung nothwendig sind. Die Beweise derselben sind den Euklidischen nachgebildet, mufsten aber theils vervollständigt, theils auf das hier Vorhergehende bezogen werden.

27. *Lehrsatz.* In jedem Dreieck ist jeder Winkel kleiner, als der Nebenwinkel des an der nemlichen Seite liegenden andern Winkels. Z. B. in dem Dreiecke *ABC* (Fig. 13.) ist der Winkel *A* kleiner als der Nebenwinkel *BCH* des Winkels *ACB*.

Beweis. Es sei in der Seite *AC*, *E* derjenige Punct, der von *A* und *C* gleich weit entfernt ist, und der immer existirt (11.). In der geraden Linie *BEF*, durch *B* und *E*, sei $EF = BE$ und *F* und *C* durch eine gerade Linie verbunden, so dafs *BC*, *EC* und *FC* in einer und derselben Ebene liegen (22.). Alsdann sind in den Dreiecken *AEB* und *CEF* die Winkel bei *E*, als Scheitelwinkel, gleich (16.); und da die einschliefsenden Seiten ebenfalls gleich sind, nemlich $AE = EC$ und $BE = EF$, so sind die Dreiecke congruent (19.). Also ist der Winkel *BAE* gleich dem Winkel *ECF*. Dieser Winkel *ECF* ist aber kleiner als der Winkel *ECD* (26.), also auch kleiner als der dem letzteren gleiche Scheitelwinkel *BCH* (16.). Also ist auch der dem Winkel *ECF* gleiche Winkel *BAH*, oder *A*, kleiner als der Winkel *BCH*.

28. *Lehrsatz.* In jedem Dreiecke liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber. Z. B. wenn in dem Dreieck *ABC* (Fig. 14.) $AC > AB$ ist, so ist der Winkel *ABC* gröfser als der Winkel *ACB*.

Beweis. Es sei $AD = AB$, so fällt *D* *zwischen* *A* und *C*, weil $AC > AB$. In dem gleichschenkligen Dreiecke *DAB* ist der Winkel *ABD* dem Winkel *ADB* gleich (20.). Für das Dreieck *BDC* aber ist *ADB* der Nebenwinkel des mit *C* an der nemlichen Seite liegenden andern Win-

kels *BDC*. Also ist *ADB* gröfser als *ACB* (27.), und folglich auch *ABD* gröfser als *C*. Ferner ist *ABD* kleiner als *ABC* (25.). Also ist um so mehr *ABC* gröfser als *ACB*.

29. *Lehrsatz*. In jedem Dreieck liegt dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüber. Z. B. wenn in dem Dreiecke *ABC* (Fig. 14.) der Winkel *ABC* gröfser als der Winkel *ACB* ist, so ist die Seite *AC* länger als die Seite *AB*.

Beweis. Wäre nicht $AC > AB$, so wäre entweder $AC = AB$, oder $AC < AB$. Im ersten Fall aber wäre $ABC = ACB$ (20.), im letzteren $ABC < ACB$ (28.). Beides ist der Voraussetzung entgegen. Also kann nur $AC > AB$ sein.

30. *Lehrsatz*. In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen länger als die dritte.

Beweis. Die Seite *AB* (Fig. 15.) des Dreiecks *ABC* sei nach *D* verlängert und $AD = AC$. In dem gleichschenkligen Dreieck *ACD* sind die Winkel *ACD* und *ADC* gleich (20.). Da aber *BC*, *AC* und *DC* in einer und derselben Ebene liegen (22.), so ist der Winkel *BCD* gröfser als der Winkel *ACD* (25.), also auch gröfser als der dem letzten gleiche Winkel *ADC* oder *BDC*. In dem Dreiecke *BCD* ist ferner die dem gröfseren Winkel *BCD* gegenüber liegende Seite *BD* länger als die dem kleineren Winkel *BDC* gegenüber liegende Seite *BC* (29.); und da nun $BD = BA + AD = BA + AC$ ist, so ist $BA + AC > BC$.

31. *Lehrsatz*. Wenn in einem Dreieck eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel so grofs sind, als eine Seite und die beiden anliegenden Winkel in einem andern Dreiecke, so sind die beiden Dreiecke congruent. Z. B. wenn in (Fig. 16.) $BC = EF$ und $B = E$, $C = F$ ist, so ist auch $AB = DE$, $AC = DF$ und $A = D$.

Beweis. Da $BC = EF$ sein soll, so kann *BC* in *EF* oder *EF* in *BC* gelegt werden, und zwar so, dafs *B* in *E*, *C* in *F* fällt, und es fällt dann nothwendig z. *B*. *DE* in *AB*, oder *AB* in *DE*, weil nach der Voraussetzung die Winkel *B* und *E* gleich sind (13. B.). Wären nun *BA* und *DE* nicht einander gleich, so wäre eines von beiden *gröfser*. Es sei $DE > AB$. Alsdann wird, wenn *BC* in *EF*, und zwar *B* in *E*, *C* in *F* gelegt wird, so dafs *AB* in *DE* fällt, *A* nothwendig in irgend einen Punct *G* fallen, der *zwischen* *E* und *D* liegt. Es wäre also nun $BC = EF$, $B = E$ und $BA = EG$. Also wären die Dreiecke *ABC* und *GEF* congruent (19.),

und folglich müfste AC in GF fallen und der Winkel GFE dem Winkel C gleich sein. Es ist aber vielmehr, da GF mit EF und DF in einer und derselben Ebene liegt, der Winkel GFE *kleiner* als der dem Winkel C gleich vorausgesetzte Winkel DFE (25.). Also kann nicht $AB < DE$ sein. Es mufs vielmehr $AB = DE$ sein und folglich A in D und mithin auch AC in DF fallen, also $AB = DE$, $AC = DE$ und $A = D$ sein.

32. *Lehrsatz.* Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einzeln den drei Seiten eines andern gleich sind, so sind auch die den gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel gleich, und die Dreiecke sind folglich congruent. Z. B. wenn (Fig. 16.) $DE = \ B$, $EF = BC$ und $FD = CA$ ist, so ist auch $F = C$, $D = A$ und $E = B$, und folglich $\triangle DEF = \triangle ABC$.

Beweis. Wäre z. B nicht $E = B$, $F = C$, so könnte nur sein:

1) $E = B$ und $F > C$, oder
2) $E = B$ und $F < C$, oder
3) $E < B$ und $F < C$, oder
4) $E > B$ und $F > C$, oder
5) $E < B$ und $F > C$.

Mehre Fälle sind nicht möglich.

I. Im ersten Falle $E = B$, $F > C$ werde BC in EF gelegt, so wird, wegen $B = E$, AB in die Linie ED fallen; der Winkel C aber, der kleiner als F sein soll, ist nothwendig einem von den mit EF und DF in einer und derselben Ebene liegenden Winkeln gleich, deren andere Schenkel *zwischen* EF und DF fallen (25.); also z. B. $C = EFG$. Es fiele daher B in E, C in F, AC in EG, BA in CD und A in G; folglich wäre $EG = AB$. Es ist aber vorausgesetzt $ED = AB$. Also kann nicht, wenn $E = B$ ist, $F > C$ sein.

II. Im zweiten Falle $E = B$ und $F < C$ wäre $E = B$, $C > F$; welches, wie so eben bewiesen, mit $EF = BC$, $DF = AC$ und $ED = BA$ *zugleich*, nicht möglich ist.

III. Im dritten Falle $E < B$, $F < C$ werde EF in BC gelegt. Der Winkel F, welcher kleiner als C sein soll, ist nothwendig einem von den mit BC und AC in einer und derselben Ebene BCA liegenden Winkeln gleich, deren andere Schenkel *zwischen* AC und BC fallen (25.). Also kann man setzen: $F = BCH$. Eben so ist der Winkel E, welcher kleiner sein soll als B, nothwendig einem von den mit BC und BH in einer und derselben Ebene CBH liegenden Winkeln gleich, deren andere Schenkel,

zwischen BC und BH fallen (25.). Also kann man setzen: $E = KBC$, so, dafs also nun das Dreieck KBC, zufolge (31.), dem Dreiecke DEF congruent und $DE = BK$, $DF = KC$, folglich auch $DE + DF$, oder $AB + AC = BK + KC$ wäre. Nun ist aber in dem Dreiecke BHK, $BH + HK > BK$ (30.); also, beiderseits KC hinzugethan, $BH + HC > BK + KC$. Ferner ist in dem Dreiecke AHC, $AH + AC > HC$ (30.); also, beiderseits BH hinzugethan, $AB + AC > BH + HC$, und folglich auch, weil $BH + HC > BK + KC$ war, $AB + AC > BK + KC$. Es kann also nicht, wie es sein müfste, $AB + AC = BK + KC$ und folglich kann auch nicht $E < B$ und $F < C$ sein.

IV. Im vierten Falle: $E > B$ und $F > C$ wäre $B < E$ und $C < F$; welches, wie so eben bewiesen, mit $DE = AB$, $EF = BC$ und $FD = CA$ *zugleich* nicht möglich ist.

V. Im fünften Falle: $E < B$, $F > C$, werde wieder EF in BC gelegt. Der Winkel E, welcher kleiner als B sein soll, ist nothwendig einem von den mit AB und CB in einer und derselben Ebene ABC liegenden Winkeln gleich, deren andere Schenkel *zwischen* AB und CB fallen (25.). Also kann man setzen: $E = LBC$. Es sei $BM = ED$, so dafs also DF in CM fällt und $F = BCM$ ist: so liegt der Durchschnittspunct L von AC und BM nothwendig *zwischen* B und M, weil nur dann, wie es vorausgesetzt wurde, $ACB < BCM$ oder F ist (25.). Es wäre also nun DE oder $AB = BM$ und DF oder $MC = AC$; folglich wären ABM und ACM *gleichschenklige* Dreiecke. In diesen Dreiecken wären also die Winkel BAM und BMA und die Winkel CAM und CMA gleich (20.). Gleichwohl ist von den in einer und derselben Ebene BAM ligenden Winkeln BAM und CAM der erste gröfser als der zweite, und eben so ist von den in einer und derselben Ebene CMA liegenden Winkeln BMA und CMA der erste kleiner als der zweite (25.). Also kann nicht der Winkel BAM, der gröfser ist als der Winkel CAM, dem Winkel BMA, welcher kleiner ist als der dem Winkel CAM gleiche Winkel CMA, gleich sein. Und folglich kann nicht $E < B$ und $F > C$ sein.

Von allen 5 Fällen findet also keiner Statt, und folglich ist nothwendig $E = B$, $F = C$.

Wenn nun aber $E = B$ ist, so fällt, wenn EF in BC gelegt wird, CD in BA und, wegen $ED = BA$, D in A; mithin fällt auch DF in AC und ist gleich AC; wie es vorausgesetzt wird. Desgleichen ist $F = C$ und weil DE in AB, DF in AC fällt, auch $D = A$.

§. IX.

Ehe das Vorhergehende auf die Theorie der Ebene angewendet werden kann, müssen, nach Vorgang von Definitionen, noch ein Paar Sätze ausgesprochen werden, die zwar auch näher bewiesen werden könnten, die aber von allen Geometern, entweder stillschweigend, oder ausdrücklich, ohne Beweis zugegeben werden. Daran werden sich dann wieder einige Lehrsätze schliefsen.

33. *Erklärung.* Die Gesammtheit der Örter im Raume, in welche ein Punct oder eine Linie unter diesen oder jenen Bedingungen gelangen kann, heifst *geometrischer* Ort des Punctes oder der Linie.

34. *Erklärung.* Der *geometrische Ort* des einen Endpuncts einer geraden Linie, deren anderer Endpunct an demselben Ort im Raume bleibt, heifst *Kugelfläche.* Der festbleibende Punct heifst *Mittelpunct* der Kugel, die bestimmende Linie *Halbmesser,* und zwei Halbmesser, in gerader Linie liegend, heifsen *Durchmesser.* Alle Halbmesser der Kugel sind also gleich lang und die Kugelfläche umschliefst ganz einen endlichen Raum, weil vorausgesetzt wird, dafs der Halbmesser in alle möglichen Lagen komme, um mit seinem Endpuncte die Kugelfläche zu beschreiben. Der Mittelpunct liegt *im Innern* der Kugel; denn er liegt in der Mitte der Durchmesser, deren Endpuncte sich in der Kugelfläche befinden.

35. *Grundsatz.* Eine gerade Linie durch irgend einen Punct innerhalb einer Fläche, die einen Raum ganz umschliefst, schneidet, genugsam verlängert, die Fläche nothwendig.

36. *Grundsatz.* Wenn irgend ein Punct einer Fläche, die einen Raum ganz umschliefst, oder auch irgend ein Punct einer geraden Linie *innerhalb* einer andern Fläche liegt, die einen Raum ganz umschliefst; zugleich aber irgend ein anderer Punct der ersten Fläche, oder der Linie, *aufserhalb* der zweiten Fläche liegt: so schneiden die erste Fläche, oder die Linie, die zweite Fläche nothwendig.

37. *Lehrsatz.* Über jeder geraden Linie von bestimmter Länge sind unzählige gleichschenklige Dreiecke möglich, deren Schenkel jedesmal zusammen länger sind, als die bestimmte Grundlinie.

Beweis. AB (Fig. 17.) sei die gegebene gerade Linie, M derjenige Punct in derselben, der von ihren Endpuncten A und B gleich weit entfernt und der zufolge (11.) immer vorhanden ist. Ferner sei $BE > BM$ und $BH = AK = AG = BE$. Sind nun A und B die Mittelpuncte zweier Ku-

gelflächen, mit den Halbmessern $AG = AK$ und $BE = BH$ (34.), so ist G ein Punct der Kugelfläche um A *innerhalb*, und K ein Punct derselben Kugelfläche *aufserhalb* der Kugelfläche um B. Folglich schneiden sich die beiden Kugelflächen nothwendig (35.). Es sei D irgend ein Punct, in welchem sie sich schneiden, so ist derselbe nothwendig von A und von B *gleich weit* entfernt; denn AD und BD sind alsdann *Halbmesser* der beiden Kugelflächen; und da *alle* Halbmesser einer Kugelfläche gleich lang sind (34.), so ist $AD = AG$ und $BD = BE$; folglich, wegen $AG = BE$, $AD = BD$. Mithin ist ADB ein gleichschenkliges Dreieck. Seine Schenkel AD und BD sind zusammen länger als AB, weil $AD = AG > \frac{1}{2}AB$ und $BD = BE > \frac{1}{2}AB$. Auch giebt es unzählige solcher gleichschenkligen Dreiecke über AB, weil $AG = BE$ willkürlich grofs angenommen werden kann, wenn es nur gröfser ist als $AM = BM$.

38. *Lehrsatz.* Durch jeden Punct M einer geraden Linie KH (Fig. 17.) kann eine gerade Linie CM gehen, die mit ihr *gleiche* Nebenwinkel $KMC = HMC$ macht.

Beweis. Es werde in der geraden Linie KH aus M die willkürliche Länge MA genommen, und es sei $BM = AM$. Die Spitze D irgend eines der gleichschenkligen Dreiecke ADB, die über AB möglich sind (37.), werde mit dem gegebenen Puncte M durch die gerade Linie DM verbunden: so ist in den Dreiecken AMD und BMD, $AM = BM$, $AD = BD$ und der Winkel DAM ist gleich dem Winkel DBM (20.). Also sind die Dreiecke congruent (19.). Folglich ist der Winkel AMD dem Winkel BMD gleich, und folglich giebt es durch den Punct M immer eine gerade Linie MD, die mit der gegebenen Linie AB *gleiche* Nebenwinkel macht.

39. *Erklärung.* Gleiche Nebenwinkel sollen *rechte* und gerade Linien im Raume, die sich unter gleichen Nebenwinkeln schneiden, auf einander *senkrecht* oder *Perpendikel* zu einander heifsen.

§. X.

Nunmehr können die Eigenschaften der *Ebene* untersucht werden. Es geschieht in den folgenden Sätzen, die diese Eigenschaften aussprechen.

40. *Lehrsatz* Wenn auf einer geraden Linie im Raume, z. B. auf DE (Fig. 18.), zwei andere gerade Linien AC und BC in einem und demselben Puncte C senkrecht stehen, so dafs also ACD, BCD, und folglich auch die Nebenwinkel ACE und BCE *rechte* Winkel (39.) sind: so stehen

5*

alle *erzeugenden* Linien jeder beliebigen, durch AC und BC gehenden *Ebene*, z. B. FC und GC, auf DE ebenfalls senkrecht.

Beweis. Es sei AB die *bestimmende* Linie einer beliebigen durch AC und BC gehenden Ebene und CE dem willkürlichen DC gleich. Da alsdann in den Dreiecken ACD und ACE zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind, nemlich $DC = EC$, $AC = AC$ und $ACD = ACE$, so sind die Dreiecke gleich (19.). Also ist $AD = AE$. Auf gleiche Weise, nemlich weil $DC = CE$, $BC = BC$ und $BCD = BCE$ ist, sind die Dreiecke BCD und BCE gleich, und folglich ist auch $BD = BE$. Es sind also in den Dreiecken ADB und AEB die drei Seiten einander gleich; nemlich $AD = AE$, $BD = BE$, wie bewiesen, und $AB = AB$. Daher sind diese Dreiecke gleich (32.), und es ist der Winkel DAF oder DAG dem Winkel EAF oder EAG gleich, wenn F und G zwei beliebige Puncte der geraden Linie AB und also FC und GC *erzeugende* Linien einer durch AC und BC gehenden Ebene sind (24.).

Es sind nun ferner in den Dreiecken DAF und EAF, oder in den Dreiecken DAG und EAG, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich; nemlich, wie bewiesen, $AD = AE$, $DAF = EAF$ oder $DAG = EAG$, und dazu $AF = AF$, oder $AG = AG$: also sind diese Dreiecke gleich (19.), und folglich ist $FD = FE$ oder $GD = GE$.

Es sind demnach ferner in den Dreiecken DFC und EFC, oder DGC und EGC, die drei Seiten gleich, nemlich $FD = FE$ oder $GD = GE$, wie bewiesen, $DC = EC$ nach der Voraussetzung, und $FC = FC$, oder $GC = GC$: also sind diese Dreiecke gleich (32.), und es ist folglich $FCD = FCE$, oder $GCD = GCE$, das heifst: FC und GC machen mit DE *gleiche* Nebenwinkel, und folglich *rechte* Winkel. Daher stehen auch die beiden erzeugenden Linien FC und GC auf DE senkrecht. Das Nemliche gilt von jeder andern *erzeugenden* Linie jeder durch AC und BC gehenden Ebene.

41. *Lehrsatz.* Wenn zwei sich schneidende gerade Linien BCD und ECF (Fig. 19.) auf einander *senkrecht* stehen, so also, dafs BCE, ECD, DCF und FCB *rechte* Winkel sind: so giebt es im Raume immer eine durch ihren Durchschnittspunct C gehende gerade Linie AC, die auf den *beiden* sich schneidenden geraden Linien *zugleich* senkrecht steht; so, dafs ACB, ACD, ACE und ACF *rechte* Winkel sind.

Beweis. Es sei GC eine beliebige der auf ECF in C senkrecht

stehenden geraden Linien, so also, dafs *GCE* und *GCF* rechte Winkel sind. Alsdann steht *EC* auf *BC* und *GC* zugleich senkrecht, weil *ECB* und *ECG* nach der Voraussetzung rechte Winkel sind.

Es sei *AC* eine beliebige von den auf *BCD* in *C* senkrechten geraden Linien. Es werde in derselben der Punct *A* willkürlich angenommen, desgleichen der Punct *B* und der Punct *D* in *BCD;* darauf werde von den geraden Linien *AB* und *AD* und der geraden Linie *BD* das Dreieck *ABD* *umschlossen.* Dieses Dreieck werde in alle mögliche Lagen gebracht, während *BD* an der nemlichen Stelle bleibt: so wird der *geometrische Ort* der Linien *BA* und *AD* eine Fläche sein, die einen Raum *ganz umschliefst.* Der Punct *C* liegt im *Innern* dieses Raums: also mufs die Linie *GC,* die durch *C* geht, nothwendig die von *BA* und *AD* beschriebene Fläche irgendwo schneiden (35.), folglich eine der Linien *AB* und *AD* in irgend einer ihrer Lagen treffen. Sie schneide *AB* in *H.*

Alsdann sind die drei geraden Linien *BC, HC* und *AC* *erzeugende* Linien der durch *AB,* als *bestimmende* Linie, und durch *C,* als bestimmenden Punct, gelegten Ebene. Die gerade Linie *EC* steht auf zwei dieser erzeugenden Linien, nemlich auf *BC* und *HC* oder *GC* der Voraussetzung nach senkrecht: also steht sie, gemäfs (40.), auch auf der dritten *AC* senkrecht.

Es stand aber *AC* nach der Voraussetzung auf *BCD* senkrecht: also steht *AC* auf *BCD* und auf *ECF* *zugleich* senkrecht, und folglich giebt es immer eine durch *C* gehende gerade Linie *AC,* welche auf den beiden gegebenen Linien zugleich senkrecht ist.

42. *Lehrsatz.* Wenn zwei gerade Linien *DC* und *EC* (Fig. 20.) einander unter einem *beliebigen* Winkel *DCE* schneiden, so giebt es immer eine, im Raume durch ihren Durchschnittspunct *C* gehende gerade Linie *ACF,* die auf den beiden sich schneidenden geraden Linien zugleich senkrecht steht; so also, dafs *ACD* und *ACE* rechte Winkel sind.

Beweis I. Es sei *D* ein beliebiger Punct in der Linie *DC,* und es werde *EC* = *DC* genommen. *B* sei derjenige Punct der geraden Linie *DE,* welcher von *D* und *E* gleich weit entfernt ist und der immer Statt findet (11.). Alsdann sind in den beiden Dreiecken *DBC* und *EBC* die drei Seiten gleich, nemlich *DC* = *EC* und *DB* = *BE,* nach der Voraussetzung, und *BC* = *BC.* Also sind die Dreiecke gleich (32.), und folglich sind die Winkel *DBC* und *EBC* gleich und mithin, als Nebenwinkel, *rechte* (38.).

II. Nun giebt es, nach (41.), immer eine durch den Durchschnitts-

punct *B* der unter *rechten* Winkeln sich schneidenden geraden Linien *CB* und *ED* gehende gerade Linie, die auf beiden zugleich senkrecht steht. Sie sei *GB*. In derselben werde willkürlich der Punct *G* genommen und mit *C* durch die, beliebig zu verlängernde gerade Linie *CGL* verbunden. Die gerade Linie *EB* steht also nunmehr auf den beiden Linien *BC* und *GB* zugleich senkrecht.

III. Es sei ferner *AC* eine der auf *BCK* senkrechten geraden Linien. Es werde in derselben der Punct *A* und in der verlängerten *BC* der Punct *K* willkürlich angenommen und durch die geraden Linien *AB* und *AK* mit *BK* das Dreieck *ABK* umschlossen.

IV. Dieses Dreieck werde in alle möglichen Lagen gebracht, während *BCK* an der nemlichen Stelle bleibt: so wird der *geometrische Ort* der Linien *BA* und *AK* eine Fläche sein, die einen Raum *ganz umschliefst*. Der Punct *C* liegt im *Innern* dieses Raums: also mufs die Linie *GC*, die durch *C* geht, nothwendig die von *BA* und *AK* beschriebene Fläche irgendwo schneiden (35.), folglich eine der Linien *AB* oder *AK* in irgend einer ihrer Lagen. Sie schneide *AB* in *H*. Alsdann ist *BHA* eine der *erzeugenden* Linien der durch *B*, als *bestimmenden* Punct, und durch *GC*, als *bestimmende* Linie, liegenden Ebene.

V. Auf zwei andern erzeugenden Linien dieser Ebene, nemlich auf *BC* und *BG*, steht aber die Linie *EB* senkrecht. Also steht sie, nach (40.), auch auf der dritten erzeugenden Linie *BA* senkrecht. Folglich ist *ABE* ein *rechter* Winkel. Mithin steht nunmehr *EB* auf *BA* und *BC* zugleich senkrecht.

VI. Es werde $CF = CA$ genommen: so sind in den beiden Dreiecken *BAC* und *CFB* zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich; nemlich $CF = CA$, $BC = BC$ und $BCF = BCA$, weil *BCA* ein rechter Winkel ist (III.). Also sind die Dreiecke gleich (19.), und folglich ist $FB = AB$.

VII. Ferner werde durch *B*, als *bestimmenden* Punct, und durch *ACF*, als *bestimmende* Linie, eine Ebene gelegt, so dafs *BA* und *BC* zwei erzeugende Linien derselben sind. Alsdann ist *BF* eine dritte erzeugende Linie dieser Ebene. Auf den beiden ersten erzeugenden Linien *BA* und *BC* stand *EB*, wie vorhin in (V.) bewiesen, senkrecht. Also steht *EB*, nach (40.), auch auf der dritten erzeugenden Linie *BF* senkrecht, das heifst: es ist *FBE* ein *rechter* Winkel.

VIII. Vorhin, in (V.), ist bewiesen, dafs ***ABE*** ein rechter Winkel, und in (VI.), dafs ***AB*** = ***FB*** ist. Also sind, weil nunmehr ***FBE,*** als rechter Winkel, dem Winkel ***ABE*** gleich ist, in den beiden Dreiecken ***ABE*** und ***FBE*** zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, nemlich ***AB*** = ***FB,*** ***BE*** = ***BE*** und ***ABE*** = ***FBE.*** Also sind die Dreiecke gleich (19.), und folglich ist ***AE*** = ***FE.***

IX. Also sind nunmehr, endlich, in den beiden Dreiecken ***ACE*** und ***FCE*** die drei Seiten gleich, nemlich ***AE*** = ***FE,*** wie bewiesen (VIII.), ***CF*** = ***CA,*** wie vorausgesetzt (VI.), und ***EC*** = ***EC.*** Also sind die Dreiecke gleich (32.), und folglich sind die Winkel ***ACE*** und ***FCE,*** als Nebenwinkel, ***rechte,*** das heifst: ***AC*** steht auf ***EC*** senkrecht, während es, nach der Voraussetzung (III.), auf ***BC*** senkrecht ist.

X. Nun sind ***BC*** und ***EC*** zwei erzeugende Linien der durch ***DE,*** als ***bestimmende*** Linie, und durch ***C,*** als ***bestimmenden*** Punct, gehenden Ebene, und ***DC*** ist eine dritte erzeugende Linie dieser Ebene. Auf ***BC*** und ***EC*** steht ***AC*** senkrecht (IX.): folglich steht es auch auf ***DC*** senkrecht (40.), und folglich giebt es immer eine gerade Linie ***AC,*** die auf beiden gegebenen, unter einem beliebigen Winkel ***DCE*** sich schneidenden geraden Linien ***DC*** und ***EC*** zugleich senkrecht steht.

43. ***Erklärung.*** Der ***geometrische Ort*** der Perpendikel durch einen festen Punct einer festen geraden Linie auf dieselbe soll ***Perpendicular-Fläche*** heifsen; die feste Linie ***Axe,*** die Perpendikel ***Strahlen,*** der feste Punct ***Mittelpunct.*** (Eine solche Perpendicular-Fläche ist also Das, was ***Fourier*** Ebene nennt.)

44. ***Lehrsatz.*** Durch keinen Punct einer geraden Linie giebt es andere Perpendikel auf dieselbe, als diejenigen, welche in der ***Perpendicular-Fläche*** durch den bestimmten Punct liegen.

Beweis I. Es sei ***FC*** (Fig. 21.) ein Perpendikel auf die gerade Linie ***AB*** durch den Punct ***C*** in derselben; welches Perpendikel nach (38.) immer Statt findet. Es werde in ***FC*** der Punct ***D*** und in ***AB*** der Punct ***A*** und der Punct ***B*** willkürlich angenommen und ***D*** mit ***A*** und mit ***B*** durch die geraden Linien ***AD*** und ***BD*** verbunden. Die Linie ***CD*** werde, mit den beiden Linien ***AD*** und ***BD*** zugleich, in alle mögliche Lagen gebracht, während ***AB*** an der nemlichen Stelle bleibt: so ist der so beschriebene ***geometrische Ort*** der geraden Linie ***DC*** die ***Perpendicular-Fläche*** auf die Axe ***AB*** durch den Punct ***C;*** die geometrischen Orte der beiden Dreiecke

DCA und ***DCB*** aber sind Flächen, die jede für sich einen Raum, namentlich die Räume ***ALD*** und ***BLD***, *ganz umschliefsen.*

II. Nun sei, wenn es möglich ist, ***GC*** ein Perpendikel durch ***C*** auf ***AB***, welches *nicht* in die Perpendicular-Fläche ***DC*** fällt, das heifst: eine gerade Linie, die mit ***AB*** *gleiche* Nebenwinkel ***GCA*** = ***GCB*** macht, ohne dafs ***GC*** eins der Perpendikel ***DC*** wäre.

III. Da ***C*** im *Innern* der ganz geschlossenen Fläche ***ADBL*** liegt, so mufs die gerade Linie ***CG***, die durch ***C*** geht, diese Fläche nothwendig schneiden (36.). Und zwar mufs sie eine der beiden Linien ***DB*** und ***DA*** in irgend einer ihrer Lagen treffen. Sie treffe ***DB*** in ***E***.

IV. Alsdann gehen die drei geraden Linien ***DC***, ***EC*** und ***BC*** durch eine und dieselbe gerade Linie ***DB*** und liegen folglich in einer Ebene durch ***C*** und ***DB***. Und zwar liegt ***CE*** *zwischen* ***CD*** und ***CB***. Deshalb aber ist der Winkel ***ECB***, oder ***GCB***, *kleiner* als der *rechte* Winkel ***DCB*** (25.).

V. Der Punct ***E*** werde nun ferner mit dem Puncte ***A*** durch die gerade Linie ***AE*** verbunden. Alsdann ist ***AE*** eine der erzeugenden Linien einer Ebene durch ***DB*** und ***A***; und da ***E*** *zwischen* ***D*** und ***B*** liegt, so liegt ***AE*** *zwischen* ***AD*** und ***AB***; der Winkel ***EAB*** ist also kleiner als der Winkel ***DAB*** (25.). In welcher Lage sich also auch die Linie ***AE***, mit ***AD*** und ***DB*** zugleich, um ***AB*** herum befinden mag: immer liegt sie nothwendig zwischen ***AD*** und ***AB***, und folglich ganz im *Innern* der ganz umschlossenen Fläche ***ADBL***.

VI. Da nun ferner ***E*** nicht in ***A*** fallen, also die Länge der Linie ***AE*** nicht Null sein kann, so mufs sie nothwendig Puncte im Innern der einen oder der andern ganz umschlossenen Fläche ***ADL*** oder ***BDL*** haben. Hat sie aber im Innern von ***ADL*** einen Punct, so mufs sie, weil ***E*** *aufserhalb* ***ADL*** liegt, die Perpendicular-Fläche ***DL*** nothwendig schneiden (36.); und hat sie im Innern von ***BDL*** einen Punct, so mufs sie, weil ***A*** *aufserhalb* ***BDL*** liegt, die Perpendicular-Fläche ***DL*** wiederum nothwendig schneiden. Jedenfalls wird also die Perpendicular-Fläche ***DL*** von der geraden Linie ***AE*** irgendwo geschnitten, etwa in ***K***, und folglich mufs ***AE*** irgend ein Perpendikel ***KC*** auf ***AB***, etwa in ***K***, treffen. Ob dieses Perpendikel ***KC*** das nemliche ***DC*** sei, welches mit ***CE*** und ***CB*** in einer und derselben Ebene liegt, ist, wie sich sogleich zeigen wird, gleichgültig.

VII. Die geraden Linien ***CA***, ***CK*** und ***CE*** liegen nun wieder in einer und derselben Ebene, nemlich in der Ebene durch ***C*** und ***AE***, und

zwar liegt *CK* zwischen *CA* und *CE*. Deshalb ist der Winkel *ECA*, oder *GCA*, *gröfser* als der rechte Winkel *KCA* (25.).

VIII. Oben in (IV.) wurde gefunden, dafs der Winkel *GCB* *kleiner* ist, als der *rechte* Winkel *DCB*. Wenn nun auch gleich das Perpendikel *DC* auf *AB* nicht das nemliche wäre mit dem Perpendikel *KC* auf *AB*, so sind doch die *rechten* Winkel *DCB* und *KCA* *einander gleich*. Also folgt aus (IV. und VII.), weil *GCB* *kleiner* und *GCA* *gröfser* als ein *rechter* Winkel ist, dafs die Nebenwinkel *GCB* und *GCA* *nicht* gleich und folglich *nicht rechte* sein können.

Mithin ist kein Perpendikel *GC* auf *AB*, durch *C*, aufserhalb der Perpendicular-Fläche, auf die Axe *AB*, durch *C* möglich.

45. *Lehrsatz*. Durch jeden Punct einer geraden Linie giebt es *nur eine* Perpendicular-Fläche.

Beweis. Es giebt kein Perpendikel durch den bestimmten Punct der Linie, welches nicht in einer Perpendicular-Fläche durch denselben läge (44). In einer zweiten Perpendicular-Fläche, aufserhalb der ersten, müfste aber nothwendig ein solches Perpendikel angetroffen werden. Also giebt es keine zweite, und mithin *nur eine* Perpendicular-Fläche durch einen und denselben Punct.

46. *Lehrsatz*. Wenn eine gerade Linie, z. B. *FC* (Fig. 21.), auf einer andern *AB* senkrecht steht, das heifst, mit ihr *gleiche* Nebenwinkel *FCA* und *FCB* macht: so giebt es in einer durch *FC* und *AB* gelegten Ebene kein zweites Perpendikel durch *C* auf *AB*, neben *FC*.

Beweis. Gesetzt, *DB* wäre die *bestimmende* Linie einer durch *FC* und *BC* gelegten Ebene, und *GC*, wenn es möglich, ein zweites Perpendikel durch *C* auf *AB*, in dieser Ebene, also durch *DB* gehend: so müfste *GC* nothwendig in der durch *C* gehenden *Perpendicular-Fläche* auf *AB* liegen; denn aufser den Perpendikeln, welche diese Fläche bilden, giebt es zufolge (44.) kein Perpendikel auf *AB*. Läge nun aber *GC* in der Perpendicular-Fläche durch *C* auf *AB*, so wäre *BC* oder *AC* auf den beiden in der Ebene *DCB* liegenden Linien *CD* und *EC* zugleich senkrecht; dann aber wäre *BC* oder *AC*, vermöge (40.), auch auf jeder andern erzeugenden Linie der Ebene *DCB* senkrecht; also auch auf *BC*. Also wäre *BC* *auf sich selbst senkrecht*. Da dieses nicht sein kann, so ist auch keine Linie *GC*, durch *C*, in der Ebene *DCB* möglich, die auf *AB* senkrecht wäre. Eben so wird bewiesen, dafs keine solche Linie in irgend einer Ebene durch *AC* und *FC* möglich ist.

47. ***Lehrsatz.*** Die im Raume auf zwei sich schneidenden geraden Linien zugleich in ihrem Durchschnitts-Puncte senkrechte gerade Linie, die immer Statt findet (42.), hat keine andere neben sich, die, ebenfalls durch den Durchschnitts-Punct der sich schneidenden geraden Linien gehend, auf beiden zugleich senkrecht stände.

Beweis. Es sei *DC* (Fig. 18.) auf den beiden in *C* sich schneidenden geraden Linien *AC* und *BC* zugleich senkrecht, *KC* aber sei, wenn es angeht, ein zweites Perpendikel durch *C*, auf *AC* und *BC* zugleich. Durch eine beliebige gerade Linie *AB*, die durch die beiden *AC* und *BC* geht, und durch den Punct *C*, werde eine Ebene gelegt, deren es ***nur eine*** giebt (23.). Alsdann stehen, wie in (40.) bewiesen, alle erzeugenden Linien dieser Ebene, z. B. *FC*, *GC* etc. auf *DC* senkrecht. Alle diese erzeugenden Linien befinden sich also in der ***Perpendicular-Fläche*** auf *DC*, die durch *C* geht, deren es wiederum ***nur eine*** giebt (45.).

Es werde der Punct *A* mit zwei beliebigen Puncten *D* und *E* der Linie *DC*, an verschiedenen Seiten von *C* liegend, durch die geraden Linien *AD* und *AE* verbunden, und darauf das Dreieck *ADE* sammt der Linie *AC* in alle mögliche Lagen gebracht, während *DCE*, so wie *KC*, an dem nemlichen Orte bleiben. Der ***geometrische Ort*** von *DAE* wird eine ganz geschlossene Fläche sein, derjenige von *AC* aber die ***Perpendicular-Fläche*** durch *C* auf *DC*.

Da der Punct *C* ***im Innern*** der geschlossenen Fläche *ADE* liegt, so mufs *KC* dieselbe, und zwar die Linie *AD*, in irgend einer ihrer Lagen schneiden (25.). Es treffe sie in der Lage *DF*, und zwar in *K*, so sind *FC*, *KC* und *DC* drei erzeugende Linien einer Ebene durch *FD* und *C*; und zwar liegt *KC* ***zwischen*** *FC* und *DC*.

Es giebt aber nach (46.) in einer, durch zwei auf einander senkrechte gerade Linien *FC* und *DC* gehenden Ebene keine andere durch *C* gehende Gerade, die auf *FC* senkrecht wäre, oder die mit ihr gleiche Nebenwinkel machte, als *DC* selbst. Also kann *KC* auf *FC* nicht senkrecht sein.

Gleichwohl müfste, wenn *KC* auf *AC* und *BC* senkrecht stände, vermöge (40.) *FC* auf *KC* perpendiculair stehen. Also ist, aufser *DC*, kein zweites Perpendikel durch *C*, auf *AC* und *BC* zugleich, möglich.

48. ***Lehrsatz.*** Es kann durch zwei sich schneidende gerade Linien ***nur eine*** Perpendicular-Fläche gelegt werden, deren Axe durch den Durchschnittspunct der beiden Linien geht.

Beweis. Es seien *AC* und *BC* (Fig. 18.) die beiden gegebenen geraden Linien: so giebt es immer eine gerade Linie *DC,* die auf beiden zugleich in ihrem Durchschnittspuncte senkrecht steht (42.). Die Gesammtheit der Perpendikel auf *DC* und *C* macht eine Perpendicular-Fläche aus, in welcher sich *AC* und *BC* befinden. Es giebt aber ***nur ein*** Perpendikel *DC,* auf *AC* und *BC* zugleich, durch *C* (47.). Desgleichen giebt es auf dieses *DC* ***nur eine*** Perpendicular-Fläche durch *C* (45.). Also giebt es nur eine Perpendicular-Fläche, die durch *AC* und *BC* geht.

49. ***Lehrsatz.*** Jede gerade Linie, die durch zwei beliebige Puncte einer Ebene geht, liegt ganz in dieser Ebene.

(Dieses ist der in der Vorbemerkung gedachte Satz, der gewöhnlich, ohne Beweis, ***als Definition*** der Ebene aufgestellt wird.)

Beweis. Es sei *C* Fig. 22. der ***bestimmende*** Punct, *AB* die ***bestimmende*** Linie der gegebenen Ebene; *AC* und *BC* seien zwei beliebige ***erzeugende*** Linien derselben, *DC* die Gerade, welche auf diesen beiden erzeugenden zugleich senkrecht steht und welche nach (42.) immer existirt, deren es aber nach (47.) ***nur eine*** giebt: so wird, indem nunmehr *AC* und *BC* zugleich auf *DC* in einem und demselben Puncte *C* senkrecht stehen, ganz wie in (40.) bewiesen, dafs auch alle übrigen ***erzeugenden*** Linien der Ebene, also auch z. B. *FC, GC* etc., auf *DC* senkrecht sind. Es giebt keine ***erzeugende*** Linie der Ebene, die nicht auf *DC* perpendiculair wäre. Die Ebene *ACB* fällt also in ihrer ganzen Ausdehnung in die ***Perpendicular-Fläche*** durch *AC* und *BC,* deren Axe durch *C* geht.

Nun seien *H* und *K* zwei beliebige, in der durch *AB* und *C* bestimmten Ebene liegende Puncte. Dieselben befinden sich, da sie in der Ebene liegen sollen, nothwendig in zwei ***erzeugenden*** Linien derselben, nemlich in den erzeugenden Linien *HC* und *KC.* Also sind *HC* und *KC* auf *DC* senkrecht (40.). Deshalb aber sind nun wieder, vermöge (40.), auch alle andern geraden Linien, die durch *C* und durch die verschiedenen Puncte der geraden Linie *HK* gehen können, auf *DC* senkrecht. Es giebt keine gerade Linie durch *HK* und *C,* die nicht auf *DC* senkrecht wäre. Die Ebene *HCK* fällt also ebenfalls, in ihrer ganzen Ausdehnung, in die ***Perpendicular-Fläche*** durch *AC* und *BC,* deren Axe durch *C* geht.

Es giebt aber, zufolge (48.) ***nur eine Perpendicular-Fläche*** durch *AC* und *BC,* deren Axe durch *C* geht. Also fallen die beiden Ebenen *ACB*

und *HCK* nothwendig in einander, und folglich liegt die, ganz in der Ebene *HCK* sich befindende Linie *HK*, auch ganz in der Ebene *ACB*.

50. *Lehrsatz.* Durch zwei sich schneidende gerade Linien kann *nur eine* Ebene gelegt werden.

Beweis. Es sei z. B. *AG* (Fig. 22.) die *bestimmende* Linie einer durch die beiden gegebenen sich schneidenden Linien *AC* und *GC* gelegten Ebene, und die Linie *DC*, deren es *nur eine* giebt (47.), auf *AC* und *GC* zugleich senkrecht: so stehen, nach (40.), *alle* erzeugenden Linien der Ebene auf *DC* senkrecht, und folglich fällt die Ebene *ACG* ganz in die Perpendicular-Fläche durch *AC* und *GC*.

Es sei *LK* eine zweite *bestimmende* Linie einer zweiten durch *AC* und *GC* gelegten Ebene: so stehen wiederum, nach (40.), auch *alle* erzeugenden Linien dieser zweiten Ebene auf der *nemlichen* Geraden *DC* senkrecht. Auch die zweite Ebene *LCK*, durch *AC* und *GC*, fällt also ganz in die Perpendicular-Fläche durch *AC* und *GC*.

Es giebt aber *nur eine* Perpendicular-Fläche *AC* auf *GC* (48.): also fallen die beiden Ebenen *ACG* und *LCK* ganz in einander, und es kann folglich durch *AC* und *GC* *nur eine* Ebene gelegt werden.

51. *Lehrsatz.* Die Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien, deren es nur eine giebt (50.), fällt ganz in die Perpendicular-Fläche durch die nemlichen Linien, deren es ebenfalls nur eine giebt (48.).

Beweis. Alle erzeugenden Linien der Ebene stehen zufolge (40.) auf der Geraden im Raume senkrecht, die auf den beiden sich schneidenden Linien zugleich perpendiculair ist, und die immer Statt findet (42.), deren es aber nur eine giebt (47.). Also liegen sie alle in der Perpendicular-Fläche durch die sich schneidenden Linien, und folglich liegt die Ebene ganz in ihr.

52. *Lehrsatz.* Eine gerade Linie durch zwei Puncte einer *Perpendicular*-Fläche liegt ganz in derselben.

Beweis. Es seien *A* und *B* (Fig. 18.) zwei Puncte der Perpendicular-Fläche, deren Mittelpunct *C* und deren Axe *DC* ist. Gesetzt nun, irgend ein Punct *F* der geraden Linie *AB* läge nicht in der Perpendicular-Fläche, so würde *FC* nicht auf *DC* senkrecht sein, das heifst, mit *DCE* nicht *gleiche* Nebenwinkel *FCD* = *FCE* machen (44.). Es macht aber die durch *AB* und durch *C* gehende gerade Linie *FC* mit *DCE* gleiche Nebenwinkel *FCD* = *FCE* (40.). Also liegt *F*, und da das Gleiche von jedem andern

Puncte der Linie *AB* gilt, diese Linie selbst, in ihrer ganzen Ausdehnung nothwendig in der Perpendicular-Fläche.

53. *Lehrsatz.* Die Perpendicular-Fläche durch zwei sich schneidende gerade Linien, deren es nur eine giebt (48.), geht durch alle die geraden Linien, durch welche die Ebene geht, deren nur eine durch die nemlichen sich schneidenden Linien gelegt werden kann (50.).

Beweis. Jede gerade Linie durch zwei beliebige Puncte der Ebene liegt ganz in ihr (49.). Also geht jede gerade Linie in der Ebene auch durch die beiden sich schneidenden Linien, die die Ebene bestimmen. Diese aber liegen zugleich in der Perpendicular-Fläche. Also verbindet die Linie zugleich zwei Puncte der Perpendicular-Fläche. Deshalb liegt sie ganz in dieser (52.). Also geht die Perpendicular-Fläche durch jede gerade Linie, durch welche die Ebene geht.

54. *Lehrsatz.* Wenn eine gerade Linie *CF* oder *CG* (Fig. 18.) auf der nemlichen Geraden im Raume *CD* senkrecht steht, die auf zwei andern geraden Linien *AC* und *BC* zugleich perpendiculair ist, so liegt sie mit diesen beiden Linien in einer und derselben Ebene.

Beweis. Da nach der Voraussetzung *AC, FC, BC, GC* zugleich auf *DC* senkrecht sind, so liegen sie in der *Perpendicular-Fläche* auf die Axe *DC* durch *C*, deren es nur eine giebt (45.). Diese Fläche aber fällt mit der Ebene durch *AC* und *BC*, deren es nur eine giebt (50.), zusammen (53.). Also liegen *FC* und *GC* mit *AC* und *BC* in einer und derselben Ebene.

55. *Lehrsatz.* Wenn der *bestimmende* Punct einer Ebene, nebst zwei Puncten ihrer *bestimmenden* Linie, in einer andern Ebene liegen, so fallen die beiden Ebenen ganz in einander.

Beweis. Da vorausgesetzt wird, dafs z. B. der *bestimmende* Punct *C* (Fig. 23.), nebst zwei Puncten *B* und *D* der *bestimmenden* Linie *BD* der Ebene *BCD*, in der Ebene *FAE* liegen, so müssen nothwendig die drei Puncte *B, C* und *D*, die nicht in eine und dieselbe gerade Linie fallen können, in *erzeugenden* Linien *AE, AG* und *AF* der Ebene *FAE* sich befinden. Dann fällt aber zunächst die *bestimmende* Linie *BD* der Ebene *BCD ganz* in die Ebene *FAE* (49.). Und deshalb befinden sich weiter *zwei* Puncte jeder *erzeugenden* Linie *BC, HC, KC, DC* etc., nemlich die Puncte *B* und *C, L* und *C, M* und *C, D* und *C* u. s. w. in der Ebene *FAE*. Also liegen auch sämmtliche *erzeugende* Linien der Ebene *BCD* ganz in der Ebene *FAE* (49.), und folglich fallen die beiden Ebenen ganz in einander.

56. ***Lehrsatz.*** Jeder Punct einer Ebene kann der Mittelpunct einer, und *nur einer* Perpendicular-Fläche sein, in welche dann die Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung fällt.

Beweis. Es sei in der Ebene *FAE* (Fig. 23.), deren *bestimmender* Punct *A* und deren *bestimmende* Linie *EF* ist, *C* ein beliebiger Punct, welcher der Mittelpunct einer Perpendicularfläche sein soll: so wird vorausgesetzt, dafs *C* in irgend einer *erzeugenden* Linie *AC* der Ebene liegt: in einer Linie also, die die *bestimmende* Linie *EF* schneidet; etwa in *G*.

Nun sei *E* irgend ein anderer Punct der *bestimmenden* Linie der Ebene *FAE,* und *EC* und *AGC* seien zwei Strahlen der Perpendicular-Ebene durch *C*. Alsdann hat die *bestimmende* Linie der Ebene *FAE* zwei Puncte *E* und *G* mit der Perpendicular-Fläche durch *EC* und *GC* gemein. Deshalb liegt sie ganz, und also jeder ihrer Puncte in ihr (51.). Also hat nunmehr ferner jede *erzeugende* Linie der Ebene *FAE,* z. B. *AE, AQ* etc., zwei Puncte mit der Perpendicular-Fläche gemein, nemlich die Puncte *A* und *E, A* und *Q* u. s. w. Also liegen alle *erzeugenden* Linien der Ebene ganz in der Perpendicular-Fläche durch *EC* und *GC,* und folglich liegt in derselben die Ebene selbst, in ihrer ganzen Ausdehnung.

Eben so wird, wenn man statt *E* irgend einen andern Punct der bestimmenden Linie der Ebene, z. B. den Punct *F* annimmt, bewiesen, dafs die Ebene ganz in der Perpendicular-Fläche durch *FC* und *GC* liegt.

Nun giebt es aber *nur eine* gerade Linie im Raume, die auf *EC* und *GC* zugleich senkrecht ist (47.), also *nur eine* Axe der Perpendicular-Fläche durch *EC* und *GC*. Diese Axe, da sie auf den beiden erzeugenden Linien *EC* und *GC* einer Ebene durch *EF* und *C* senkrecht steht, ist aber auch auf jeder andern erzeugenden Linie dieser Ebene, z. B. auf *FC* senkrecht (40.). Also ist sie auch auf *GC* und *FC* zugleich senkrecht, und folglich die Axe der Perpendicular-Fläche durch *GC* und *FC,* deren es wiederum nur eine giebt.

Die beiden Perpendicular-Flächen durch *EC* und *GC,* und durch *FC* und *GC,* so wie jede andere, in welche die Ebene *EAF* fallen kann, haben also eine *gemeinschaftliche* Axe; zugleich gehen alle durch den Punct *C* dieser Axe.

Es giebt aber durch einen und denselben Punct einer Axe *nur eine* Perpendicular-Fläche auf diese Axe (45.). Also giebt es immer eine Per-

pendicular-Fläche für jeden Punct einer Ebene, in welche die Ebene ganz fällt, aber *nur eine.*

57. *Lehrsatz.* Jede gerade Linie, so lang sie auch sein mag, kann, unter einem bestimmten Winkel gegen eine andere, die sich in einer gegebenen Ebene befindet, in diese Ebene gelegt werden.

Beweis. Der Punct der Ebene, in welcher sich die beiden geraden Linien schneiden sollen, werde als der Mittelpunct derjenigen Perpendicular-Fläche betrachtet, in welche die Ebene fällt; was immer angeht (56.). Alsdann ist die gegebene Linie einer der Strahlen der Perpendicular-Fläche; die in die Ebene zu legende zweite Linie aber wird ein anderer und derjenige Strahl der Perpendicular-Fläche sein, der mit dem ersten den bestimmten Winkel macht. Und da nun die Länge der Strahlen unbegrenzt ist, so kann die in die Ebene zu legende Linie so lang sein, als man will.

58. *Lehrsatz.* Jedes Dreieck kann in eine bestimmte Ebene und an eine bestimmte Linie in derselben gelegt werden.

Beweis. Die bestimmte Seite werde in die gegebene Linie gelegt: so kann eine zweite Seite des Dreiecks, unter dem bestimmten Winkel desselben, an jene Linie, ebenfalls in die Ebene gelegt werden (57.). Dann aber fällt die dritte Seite des Dreiecks, weil sie zwei Puncte der vorigen beiden, und folglich zwei Puncte der Ebene verbindet, ebenfalls ganz in dieselbe (49.).

59. *Lehrsatz.* Durch jedes Dreieck kann eine Ebene gelegt werden, in welche die drei Seiten desselben in ihrer ganzen Ausdehnung fallen; aber *nur eine.*

Beweis. Es sei ABC (Fig. 24.) das Dreieck, durch welches eine Ebene gelegt werden soll, M sei der *bestimmende* Punct und DE die bestimmende Linie einer Ebene. Alsdann werde M z. B. in irgend eine Gerade AK, die durch A und durch irgend einen Punct K der A gegenüber liegenden Dreiecks-Seite BC geht, gelegt. Ferner werde die bestimmende Linie der Ebene durch die Linie AKM, etwa in I, gelegt und zugleich durch die Gerade BM, die B und M verbindet, etwa in H. Alsdann sind AM und BM zwei erzeugende Linien der Ebene HMI; AB hat also die beiden Puncte A und B, und BC die beiden Puncte B und K mit der Ebene gemein. Deshalb fallen AB und BC ganz in die Ebene (49.). Und da ferner AC die beiden Puncte A und C mit der Ebene gemein hat, so fällt auch AC ganz in dieselbe.

Also geht die Ebene durch alle drei Seiten des Dreiecks, und es kann folglich immer eine Ebene durch das Dreieck gelegt werden.

Nun werde eine zweite Ebene ***PNQ*** ganz auf die nemliche Weise durch das Dreieck gelegt, so hat dieselbe die Puncte ***C*** und ***R*** mit der vorigen Ebene ***HMI*** gemein; folglich liegt die gerade ***RC***, und mithin auch der bestimmende Punct ***N*** der zweiten Ebene, nothwendig in der ersten (49.); desgleichen der Durchschnittspunct ***Q*** der bestimmenden Linie ***FG*** der zweiten Ebene, nebst der erzeugenden Linie ***NC***. Ferner liegt, da die zweite Ebene nunmehr, nächst dem Puncte ***A***, den Punct ***N*** mit der ersten Ebene gemein hat, auch die erzeugende Linie ***NA*** der zweiten Ebene, und mithin ihr Durchschnitt ***P*** mit ihrer Bestimmenden, in der ersten Ebene. Folglich liegen, nächst dem bestimmenden Puncte ***N*** der zweiten Ebene, zwei Puncte ***P*** und ***Q*** ihrer bestimmenden Linie in der ersten Ebene. Deshalb aber fallen beide Ebenen ganz in einander (55.); und da das Nemliche von jeder andern Ebene gilt, so kann durch ein Dreieck *nur eine* Ebene gelegt werden.

60. *Lehrsatz.* Wenn zwei Ebenen drei Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, mit einander gemein haben, so fallen sie ganz in einander.

Beweis. Durch je zwei von den drei Puncten kann nur eine gerade Linie gelegt werden (2.), also durch die drei Puncte *nur ein* Dreieck. Durch jedes Dreieck aber kann *nur eine* Ebene gelegt werden (59.). Also fallen zwei Ebenen, die drei Puncte gemein haben, ganz in einander.

61. *Lehrsatz.* Eine Ebene und eine gerade Linie, die sich schneiden, können nur einen Punct gemein haben.

Beweis. Hätten sie auch nur zwei Puncte gemein, so fiele die Linie ganz in die Ebene (49.), und schnitte sie folglich nicht.

62. *Lehrsatz.* Alle Durchschnittspuncte zweier Ebenen liegen nothwendig in gerader Linie.

Beweis. Läge ein dritter Durchschnittspunct nicht in der Geraden zwischen beliebigen zweien, so würden schon die Ebenen ganz in einander fallen (60.) und sich folglich nicht schneiden.

63. *Lehrsatz.* Die Summe jedes Paares von Nebenwinkeln ist so grofs, als die Summe von zwei Rechten.

Beweis. Sind die Nebenwinkel ***ACD*** und ***BCD*** (Fig. 21.) einander *gleich*, so ist jeder ein rechter (30.), und der Satz ist an sich selbst klar. Sind die Nebenwinkel ***ACE*** und ***BCE*** einander *nicht* gleich, so dafs also ***EC*** nicht in die Perpendicular-Fläche ***DC*** auf ***AB*** durch ***C*** fällt, so wird

in (44.) bewiesen, dafs der eine der beiden Winkel, z. B. BCE, nothwendig *kleiner*, der andere ACE nothwendig *gröfser* ist, als ein rechter. Ferner wird in (44.) bewiesen, dafs CE die gerade Linie DB, die einen Punct D irgend eines Perpendikels DC der Perpendicular-Fläche mit B verbindet, nothwendig schneidet, etwa in E; desgleichen, dafs die gerade Linie AE nothwendig irgend einen, vielleicht einen andern Perpendikel KC der Perpendicular-Fläche schneidet, etwa in K. Da auf diese Weise die Winkel ECB und DCB in einer und derselben Ebene liegen, nemlich in derjenigen, deren bestimmende Linie DEB und deren bestimmender Punct C ist, so ist nach (25.)

$$ECB + DCE = DCB = R,$$

wenn R einen rechten Winkel bezeichnet: also ist, wenn man noch R auf beiden Seiten hinzuthut,

$$1. \quad ECB + DCE + R = 2R.$$

Da ferner der Winkel KCE und der rechte Winkel ACK in einer und derselben Ebene liegen, nemlich in derjenigen, deren bestimmende Linie AKE und deren bestimmender Punct C ist, so ist nach (25.) $KCE + ACK = ACE$. oder, weil $ACK = R$,

$$2. \quad KCE + R = ACE.$$

Nun stelle man sich im Raume die gerade Linie vor, die auf EC und BC zugleich senkrecht steht, die immer Statt findet (41.) und deren es nur eine giebt (47.), so steht dieselbe, weil DC mit EC und BC in einer und derselben Ebene liegt, auch nothwendig auf DC senkrecht (40.). Ferner steht sie auf AC senkrecht, weil ACB eine gerade Linie ist, folglich auf AC und EC zugleich, und folglich, weil KC mit AC und EC in einer und derselben Ebene liegt, auch auf KC (40.). Es liegen aber DC und KC beide in der Perpendicular-Fläche auf AB durch C: also fallen sie, weil sie in derselben, wie so eben folgte, mit dem Perpendikel auf EC und BC (deren es nur einen giebt, einen gleichen, nemlich einen rechten Winkel machen) nothwendig in einander, und daher ist der Winkel KCE dem Winkel DCE gleich.

Es ist also hier oben in (2.) nunmehr

$$3. \quad DCE + R = ACE.$$

Setzt man Dies oben in (1.), so findet sich

$$4. \quad ECB + ACE = 2R;$$

welches der Lehrsatz ist.

64. *Lehrsatz.* Wenn zwei Winkel, die zusammen so grofs als zwei Rechte sind, den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und in einer und derselben Ebene liegen, so liegen ihre andern Schenkel nothwendig in gerader Linie.

Beweis. Läge der Schenkel eines Winkels, der mit dem Winkel ACB (Fig. 25.) den andern Schenkel AC und den Scheitel C gemein hat, mit ihm zusammen so grofs ist als zwei Rechte, und zugleich mit ihm in einer und derselben Ebene liegt, nicht in der geraden Linie BCG, so liege er z. B. in CD, oder in CE.

Da vorausgesetzt wird, dafs CD und CE mit AC und BC in einer und derselben Ebene liegen, so steht CD, oder CE, zufolge (40.) nothwendig auf der Geraden im Raume senkrecht, die auf AC und BC zugleich perpendiculair ist, die immer Statt findet (42.) und deren es nur eine giebt (47.). Desgleichen steht CG auf dieser nemlichen Geraden senkrecht, weil BCG eine gerade Linie sein soll.

Da aber auf diese Weise CD und CE auf der nemlichen Geraden senkrecht sind, die auf CA und CG zugleich perpendiculair steht, so liegen sie mit CA und CG in einer und derselben Ebene (54.). Deshalb ist denn ACD kleiner und ACE gröfser als ACG (25.). Es ist aber $BCA + ACG = 2R$ (63.); also kann nicht $BCA + ACD$ und auch nicht $BCA + ACE$ gleich zwei Rechten sein, und daher kann der Schenkel des Winkels, der mit ACB zusammen, in der nemlichen Ebene, so grofs sein soll, als zwei Rechte, nicht in CD oder CE, sondern nur in die *gerade Linie* BCG fallen.

Der Beweis von (63. und 64.) ist ebenfalls dem Euklidischen Buch 1. Satz 14. nachgebildet, aber mit den für die gegenwärtigen Ansichten nothwendigen Vervollständigungen.

65. *Lehrsatz.* Von jedem Winkel giebt es, in seiner Ebene, gleich grofse Hälften.

Beweis. Ist der Winkel ACB (Fig. 26.) so grofs als zwei Rechte, so ist die Linie ACB eine Gerade (64.), und für jeden Punct C einer geraden Linie giebt es eine Gerade CD, die mit AB *gleiche* Nebenwinkel macht (38.).

Ist der Winkel ACB kleiner oder gröfser, als zwei Rechte, so werde $BC = AC$ genommen, und A mit B durch die gerade Linie AB verbunden. Diese gerade Linie kann nicht durch C gehen; denn sonst müfste irgend eine durch C gehende, mit AC und BC in einer und derselben Ebene liegende

gerade Linie **CD** mit **ACB** Nebenwinkel machen, deren dem Winkel **ACB** gleiche Summe zwei Rechte wäre (63.); was der Voraussetzung entgegen ist. Nun werde in der von **ACB** verschiedenen geraden Linie **ADB**, **AD** $=$ **BD** genommen; was immer angeht (11.). Alsdann sind in den Dreiecken **ACD** und **BCD** alle drei Seiten die nemlichen; denn es ist **AC** $=$ **BC** und **AD** $=$ **BD**, nach der Voraussetzung, und **CD** ist sich selbst gleich. Also sind die Dreiecke congruent (32.), und folglich sind die Winkel **ACD** und **BCD**, die, weil **CD** durch **AB** geht, in der Ebene des Winkels **ACB** liegen, einander gleich, und folglich gleich grofse Hälften des Winkel **ACB**, in dessen Ebene.

66. *Lehrsatz.* Wenn in der Ebene eines Winkels **ACB** (Fig. 27.) ein kleinerer Winkel **ACD** liegt, mit seinem Scheitel **C** und einem Schenkel **AC** in dem Scheitel und dem einen Schenkel des gröfseren, so giebt es immer einen Winkel **ACE**, der noch kleiner ist, als der kleinere Winkel **ACD**.

Beweis. Durch fortgesetzte Halbirung des gröfseren Winkels **ACB**, die nach (65.) immer Statt findet, kommt man auf einen Winkel, der kleiner ist als jeder beliebige Winkel, folglich auch kleiner als der Winkel **ACD**.

§. XI.

Dieses wären die nothwendigsten Sätze aus der Theorie der Ebene, so, wie sich dieselbe nach meinem unmaafsgeblichen Ermessen, auf die Grundsätze (25., 35. und 36.), die schon von den Geometern (entweder stillschweigend oder ausdrücklich) zugegeben werden, wie es scheint, folgerecht errichten läfst. Es werden sich daran ohne Schwierigkeiten die ferner nöthigen Sätze anfügen lassen.

In den bisherigen Sätzen ist nirgend der Begriff der *Parallelen* vorgekommen. Es mufs daher noch das Nothwendigste davon hinzugefügt werden; und zwar werde ich kürzlich diejenige Theorie der Parallelen geben, die den Begriff von *Winkel-* und *Parallelräumen* voraussetzt, und die ich für die beste halte: ungefähr in der Gestalt, wie ich sie in dem Journale der Mathematik Band XI. Heft 2. S. 198 aufgestellt habe; aber den hiesigen Sätzen von der Ebene gemäfs eingerichtet und vervollständigt.

67. *Lehrsatz.* Wenn zwei gerade Linien **MAP** und **NCQ** (Fig. 13.) in einer und derselben Ebene liegen und mit einer dritten **ACH**, die sie schneiden, an ähnlichen Seiten *gleiche* Winkel **MAH** $=$ **NCH** machen, so begegnen sie sich nirgend.

Beweis. Gesetzt, es sei anders und sie begegneten sich irgendwo, so geschehe es in *B*. Die gerade Linie *BCD*, da sie die beiden Puncte *B* und *C* mit der Ebene gemein hat, in welcher nach der Voraussetzung *MP* und *NF* liegen, wird ganz in ihr sich befinden. Es sei *E* der von *A* und *C* gleich weit entfernte Punct, der zufolge (11.) nothwendig existirt, *BEF* sei eine gerade Linie, $EF = BE$ und *F* mit *C* durch die gerade Linie *CF* verbunden: so wird *BF*, weil es mit der Ebene durch *MP* und *NQ* die beiden Puncte *B* und *E* gemein hat, ganz in ihr liegen; desgleichen *CF*, weil es den Punct *C* und den Punct *F* der Linie *BF* mit der Ebene gemein hat. Da in den Dreiecken *AEB* und *CEF* zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel die nemlichen sind, nemlich $AE = EC$, $BE = EF$, nebst den Scheitelwinkeln bei *E*, so sind die Dreiecke congruent (19.), und folglich ist der Winkel *ECF* dem Winkel *MAH* gleich. Es ist aber der dem Winkel *MAH* der Voraussetzung nach gleiche Winkel *NCH* seinem Scheitelwinkel *ECQ* gleich; also $MAH = ECQ$. Beide Linien *CF* und *CQ* liegen aber in einer und derselben Ebene; also fällt *CF*, weil sie mit *CE* denselben Winkel macht wie *CQ*, nothwendig mit *CQ* zusammen.

Schnitte demnach *CQ* die *MP* in *B*, so müfste *BCF* eine gerade Linie sein. Es liegt aber *C* nicht in der geraden Linie *BEF*: denn läge es in derselben, so lägen *EC* und *AEC* darin, folglich auch *BA* und *BC*, und *BA* läge in *BC*, mithin fielen *BA* und *CF* zusammen, welches der Voraussetzung entgegen ist. Es kann daher *BCF* keine gerade Linie sein, weil es sonst deren zwei, von einander verschiedene gäbe, die eine durch *E*, die andere durch den Punct *C*, der nicht in *BEF* liegt. Es kann folglich auch *CQ* die *MP* nicht in *B* schneiden, und eben so wenig in irgend einem andern Puncte; auch, eben so, nicht *MP* die *NQ* irgendwo.

Dieser Beweis ist dem Euklidischen des nemlichen Lehrsatzes nachgebildet, aber nach den gegenwärtigen Ansichten vervollständigt.

68. Lehrsatz. Zwei gerade Linien *AC* und *BD* (Fig. 28.), die von einer dritten *CDN* so geschnitten werden, dafs die beiden innern, an einerlei Seite der letztern liegenden Winkel *ACD* und *BDC* zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen.

Beweis. Es wird vorausgesetzt, dafs *AC* und *BD* in einer und derselben Ebene liegen. In dieser Ebene befindet sich dann auch die Gerade *CDN*, weil sie zwei Puncte *C* und *D* mit der Ebene gemein hat.

Da $BDC + BDN = 2R$ ist (63.), und nach der Voraussetzung

$BDC + ACD < 2R$ sein soll, so ist $ACD < BDN$. Es sei $FCN = BDN$, und FC liege in der nemlichen Ebene wie alle übrigen Linien: so ist nothwendig $FCN > ACN$; und zwar um den Winkel FCA.

Welches nun auch der Winkel FCA sein mag, so kann immer durch fortgesetzte Halbirung des Winkels FCN ein Winkel FCE angegeben werden, der kleiner ist als FCA (66.). Also ist $FCN = n.FCE$, wo n eine *endliche* Zahl bezeichnet.

So viele Winkelräume, jeder gleich FCE, als die Zahl n Einheiten hat, an einander gelegt, füllen also den ganzen Winkelraum FCN, das heifst, den Theil der Ebene aus, den die Linien FC und CN begrenzen. Und da $FCA > FCE$, so füllen n Winkelräume, jeder gleich FCA, an einander gelegt, einen Winkelraum aus, der *gröfser* ist als FCN.

Nun sei $DG = GI = IL$ etc. $= CD$ und $CL = n.CD$. Ferner seien GH, IK, LM etc., sämmtlich in der Ebene der übrigen Linien liegend, mit BD und FC parallel. Alsdann sind alle die Parallelräume $FCDB$, $BDGH$, $HGIK$ etc., das heifst, diejenigen Theile der Ebene, die von den Linien FC, CD, DB, von den Linien BD, DG und GH etc. begrenzt werden, *congruent*, und folglich auch *gleich grofs*. Also ist der Parallelraum $FCLM = n.FCDB$.

Der Parallelraum $FCLM$ ist aber kleiner, als der Winkelraum FCN; denn er läfst von demselben noch den Winkelraum MLN übrig. Also ist er um so mehr kleiner als der Winkelraum $n.FCA$, der gröfser war als FCN.

Es ist also $n.FCDB < n.FCA$: folglich auch $FCDB < FCA$. Daher kann der Winkelraum FCA nicht in dem Parallelraume $FCDB$ enthalten sein, und daher mufs AC die BD nothwendig irgendwo schneiden.

69. *Anmerkung.* Die gerade Linie PQ (Fig. 11.), durch den bestimmenden Punct A einer Ebene gehend, begegnet, wenn sie mit irgend einer erzeugenden Linie derselben, z. B. mit AE, gleiche Winkel $BEe_{,} = PAe_{,}$ macht, der bestimmenden Linie BC der Ebene nirgend (67.). Sie ist *die einzige*, welche diese Eigenschaft hat; denn jede andere gerade Linie MN, durch A, die mit AE ungleiche Winkel macht, begegnet der bestimmenden Linie BC nothwendig (68.). Die Lage der Linie PQ, und die Lage dieser allein, wird also durch die bestimmende Linie der Ebene *nicht* gegeben. Sie wird aber dadurch bestimmt, dafs sie auf derjenigen Geraden im Raume senkrecht steht, die auf beliebigen zwei erzeugenden Linien der Ebene zugleich perpendiculair ist; oder auch dadurch, dafs sie durch irgend eine Gerade in der Ebene geht, die nicht mit BC parallel läuft.

§. XII.

Die beiden Sätze (67. und 68.) enthalten bekanntlich die Theorie der Parallelen, und der zweite Satz (68.) ist *wörtlich* das eilfte Euklidische Axiom. Gegen den beigefügten Beweis desselben läfst sich nichts weiter einwenden, als dafs in demselben Figuren zu Hülfe genommen werden, die *nicht ganz umschlossen sind.* Dies bringt die Schwierigkeit mit sich, dafs, nachdem von dem Winkelraume *FCN* (Fig. 28.) der Parallelraum *FCLM* weggenommen worden, noch ein Winkelraum *MLN* übrig bleibt, der dem Winkelraume *FCN gleich* ist, so dafs also scheinbar *Verschiedenes gleich* sein soll, was ein Widerspruch zu sein scheint. Die Schwierigkeit entsteht daraus, dafs *ungleichartige* Gröfsen, nemlich Winkel- und Parallelräume, mit einander verglichen werden. Allein, dafs der Winkel *FCA* nicht in dem Parallelraume *FCDB* enthalten sein kann, ist auf dieselbe Art gewifs, als dafs ein Körper nicht in einer Linie, eine Linie nicht in einem Puncte Raum findet. Und da nun die *Congruenz* der verglichenen Figuren bei dem Beweise eben so streng Statt findet, wie bei jedem andern Beweise von Sätzen über geschlossene Figuren, so scheint mir der beigefügte Beweis befriedigend zu sein.

Berlin, 1834.

3.

Über die Tafel primitiver Wurzeln.

(Vom Herrn Dr. *Kulik*, Professor der Math. an der Universität zu Prag) *).

(Fortsetzung der im IX. Bande dieses Journals vom Herausgeber entworfenen Tafel dieser Wurzeln für die Primzahlen 3 bis 101.)

Ich habe schon vor mehreren Jahren bei Gelegenheit der Fortsetzung der vom Herrn Geheimen Hofrath *Gaufs* in seinen *Disquisitiones arithmeticae* bekannt gemachten Tafel periodischer Dezimalbrüche, eine Tafel primitiver Wurzeln für alle Primzahlen und ihre Potenzen unter 1000 berechnet, und war daher nicht wenig erfreut, zu lesen, dafs eine solche Arbeit nach den Schlufsworten des Herausgebers dieses Journals im Bande IX. S. 35 einer Bekanntmachung in dieser schätzbaren Zeitschrift nicht unwerth würde befunden werden.

Tafel I.

Kleinste primitive Wurzel für die Primzahlen 103 bis 1009.

Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.	Pr.	W.
103	5	191	19	277	5	379	10	467	2	587	2	677	2	797	2	907	2
107	2	193	5	281	3	383	10	479	13	593	10	683	5	809	3	911	17
109	6	197	2	283	3	389	10	487	10	599	14	691	3	811	10	919	7
113	3	199	3	293	2	397	5	491	10	601	7	701	10	821	10	929	3
127	3	211	2	307	5	401	3	499	10	607	3	709	10	823	10	937	10
131	2	223	3	311	17	409	21	503	10	613	2	719	11	827	2	941	10
137	3	227	2	313	10	419	10	509	10	617	3	727	10	829	2	947	2
139	2	229	6	317	2	421	2	521	3	619	10	733	6	839	11	953	10
149	2	233	3	331	3	431	7	523	2	631	3	739	3	853	2	967	5
151	6	239	7	337	10	433	10	541	10	641	3	743	10	857	10	971	10
157	5	241	7	347	2	439	15	547	2	643	11	751	3	859	2	977	10
163	2	251	6	349	2	443	2	557	2	647	10	757	2	863	10	983	10
167	5	257	3	353	3	449	3	563	2	653	2	761	6	877	2	991	5
173	2	263	5	359	7	457	13	569	3	659	10	769	11	881	12	997	7
179	2	269	2	367	10	461	10	571	10	661	2	773	2	883	2	1009	5
181	2	271	6	373	2	463	3	577	10	673	5	787	2	887	10		

---

*) Der Abdruck dieser Tafeln ist durch Zufall mehrere Jahre verspätet worden, weshalb der Herausgeber sehr um Entschuldigung bittet.

Es ist für die Theorie der Primzahlen wichtig, eine Tafel sämmtlicher Potenzenreste für die kleinste primitive Wurzel als Grundzahl zu haben. Manche Wahrheiten, die sich bei aufmerksamer Betrachtung einer solchen Tafel von selbst aufdringen, könnten der Theorie als eben so viele Lehrsätze zum Beweisen vorgeführt werden. Überdies ist die Ableitung der secundären Wurzeln aus einer solchen Tafel so einfach, dafs man in den meisten vorkommenden Fällen damit ausreichen dürfte.

In der folgenden Tafel II. steht zuerst die Primzahl. Hierauf folgen ihre sämmtlichen primitiven Wurzeln, unter denen diejenigen mit einem Puncte bezeichnet sind, welche der Bedingung Genüge leisten (*Gauss* Disq. arithm. art. 72), dafs wenn sie zur Grundzahl angenommen werden, der Index der Zahl 10 den kleinsten Werth erhält. Die letzte Spalte enthält die Potenzenreste für die kleinste primitive Wurzel als Grundzahl, in der Ordnung wie sie auf einander folgen. Die erste Hälfte derselben ist von der zweiten durch einen Doppelpunct geschieden, um die Controle der Schreib- oder Druckfehler zu erleichtern, da die gleichvielten Zahlen beider Hälften bekanntlich die Primzahl zur Summe haben. Z. B. in der Primzahl 103 sind die Anfangszahlen beider Hälften 5 und 98, deren Summe 103 ist; eben so geben die folgenden Zahlen 25 und 78, 22 und 81, 7 und 96 dieselbe Summe. Allgemein bei der Primzahl $2p+1$ wird der $n$te und der $(n+p)$te Rest die Summe $2p+1$ geben.

Tafel II.

Primitive Wurzeln und Potenzenreste für die Primzahlen 103 bis 1009.

	Primitive Wurzeln				N.	Reste									
						0	1	2	2	4	5	6	7	8	9
103	5	6.	11	12	0		5	25	22	7	35	72	51	49	39
	20	21	35	40	1	92	48	34	67	26	27	32	57	79	86
	43	44	45	48	2	18	90	38	87	23	12	60	94	58	84
	51	53	54	62	3	8	40	97	73	56	74	61	99	83	3
	65	67	70.	71	4	15	75	66	21	2	10	50	44	14	70
	74	75	77	78	5	41	102	98	78	81	96	68	31	52	54
	84	85	86	87	6	64	11	55	69	36	77	76	71	46	24
	88	96	99	101	7	17	85	13	65	16	80	91	43	9	45
					8	19	95	63	6	30	47	29	42	4	20
					9	100	88	28	37	82	101	93	53	59	89
					10	33	62	1							

	Primitive Wurzeln					N.	Reste									
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
107	2	5	6	7	8	0		2	4	8	16	32	64	21	42	84
	15	17	18	20	21	1	61	15	30	60	13	26	52	104	101	95
	22	24	26	28	31	2	83	59	11	22	44	88	69	31	62	17
	32	38	43	45	46	3	34	68	29	58	9	18	36	72	37	74
	50	51	54	55	58	4	41	82	57	7	14	28	56	5	10	20
	59	60	63.	65	66	5	40	80	53	106:	105	103	99	91	75	43
	67	68	70	71	72											
	73	74	77	78	80	6	86	65	23	46	92	77	47	94	81	55
	82	84	88	91	93	7	3	6	12	24	48	96	85	63	19	38
	94	95	96	97	98	8	76	45	90	73	39	78	49	98	89	71
	103	104				9	35	70	33	66	25	50	100	93	79	51
						10	102	97	87	67	27	54	1			
109	6	10.	11	13		0		6	36	107	97	37	4	24	35	101
	14	18	24	30		1	61	39	16	96	31	77	26	47	64	57
	37	39	40	42		2	15	90	104	79	83	10	60	33	89	98
	44	47	50	51		3	43	40	22	23	29	65	63	51	88	92
	52	53	56	57		4	7	42	34	95	25	41	28	59	27	53
	58	59	62	65		5	100	55	3	18	108:	103	73	2	12	72
	67	69	70	72												
	79	85	91	95		6	105	85	74	8	48	70	93	13	78	32
	96	98	99	103		7	83	62	45	52	94	19	5	30	71	99
						8	49	76	20	11	66	69	87	86	80	44
						9	46	58	21	17	102	67	75	14	84	68
						10	81	50	82	56	9	54	106	91	1	
113	3	5	6	10.		0		3	9	27	81	17	51	40	7	21
	12	17	19	20		1	63	76	2	6	18	54	49	34	102	80
	21	23	24	27		2	14	42	13	39	4	12	36	108	98	68
	29	33	34	37		3	91	47	28	84	26	78	8	24	72	103
	38	39	43	45		4	83	23	69	94	56	55	52	43	16	48
	46	47	54	55		5	31	93	53	46	25	75	112:	110	104	86
	58	59	66	67												
	68	70	74	75		6	32	96	62	73	106	92	50	37	111	107
	76	79	80	84		7	95	59	64	79	11	33	99	71	100	74
	86	89	90	92		8	109	101	77	5	15	45	22	66	85	29
	93	94	96	101		9	87	35	105	89	41	10	30	90	44	19
	103	107	108	110		10	57	58	61	70	97	65	82	20	60	67
						11	88	38	1							
127	3	6	7	12		0		3	9	27	81	116	94	28	84	125
	14	23	29	39.		1	121	109	73	92	22	66	71	86	4	12
	43	45	46	48		2	36	108	70	83	122	112	82	119	103	55
	53	55	56	57		3	38	114	88	10	30	90	16	48	17	51
	58	65	67	78		4	26	78	107	67	74	95	31	93	25	75
	83	85	86	91		5	98	40	120	106	64	65	68	77	104	58

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
127	92 93 96 97	6	47	14	42	126 :	124	118	100	46	11	33
	101 106. 109. 110	7	99	43	2	6	18	54	35	105	61	56
	112 114 116 118	8	41	123	115	91	19	57	44	5	15	45
		9	8	24	72	89	13	39	117	97	37	111
		10	79	110	76	101	49	20	60	53	32	96
		11	34	102	52	29	87	7	21	63	62	59
		12	50	23	69	80	113	85	1			
131	2 6 8 10.	0		2	4	8	16	32	64	128	125	119
	14 17 22 23	1	107	83	35	70	9	18	36	72	13	26
	26 29 30 31	2	52	104	77	23	46	92	53	106	81	31
	37 40 50 54	3	62	124	117	103	75	19	38	76	21	42
	56 57 66 67	4	84	37	74	17	34	68	5	10	20	40
	72 76 82 83	5	80	29	58	116	101.	71	11	22	44	88
	85 87 88 90											
	93 95 96 97	6	45	90	49	98	65	130 :	129	127	123	115
	98 103 104 106	7	99	67	3	6	12	24	48	96	61	122
	110 111 115 116	8	113	95	59	118	105	79	27	54	108	85
	118 119 120 122	9	39	78	25	50	100	69	7	14	28	56
	124 126 127 128	10	112	93	55	110	89	47	94	57	114	97
		11	63	126	121	111	91	51	102	73	15	30
		12	60	120	109	87	43	86	41	82	33	66
		13	1									
137	3 5 6 12. 13	0		3	9	27	81	106	44	132	122	92
	20 21 23. 24 26	1	2	6	18	54	25	75	88	127	107	47
	27 29 31 33 35.	2	4	12	36	108	50	13	39	117	77	94
	40 42. 43 45. 46	3	8	24	72	79	100	26	78	97	17	51
	47 48 51 52. 53	4	16	48	7	21	63	52	19	57	34	102
	54. 55. 57 58. 62	5	32	96	14	42	126	104	38	114	68	67
	66. 67 70 71 75											
	79 80 82 83 84	6	64	55	28	84	115	71	76	91	136 :	134
	85 86 89. 90 91	7	128	110	56	31	93	5	15	45	135	131
	92 94. 95 97. 102	8	119	83	112	62	49	10	30	90	133	125
	104. 106. 108 110 111	9	101	29	87	104	98	20	60	43	129	113
	113 114 116 117 124	10	65	58	37	111	59	40	120	86	121	89
	125 131 132 134.	11	130	116	74	85	118	80	103	35	105	41
		12	123	95	11	33	99	23	69	70	73	82
		13	109	53	22	66	61	46	1			
139	2 3 12 15	0		2	4	8	16	32	64	128	117	95
	17 18 19 21	1	51	102	65	130	121	103	67	134	129	119
	22 26 32 40	2	99	59	118	97	55	110	81	23	46	92
	50 53 56 58	3	45	90	41	82	25	50	100	61	122	105
	61 68 70 72	4	71	3	6	12	24	48	96	53	106	73
	73 85 88 90	5	7	14	28	56	112	85	31	62	124	109

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
139	92. 93 98 101	6	79	19	38	76	13	26	52	104	69	138:
	102 104 108 109	7	137	135	131	123	107	75	11	22	44	88
	110 111 114 115	8	37	74	9	18	36	72	5	10	20	40
	119 123 126 128	9	80	21	42	84	29	58	116	93	47	94
	130 132 134 135	10	49	98	57	114	89	39	78	17	34	68
		11	136	133	127	115	91	43	86	33	66	132
		12	125	111	83	27	54	108	77	15	30	60
		13	120	101	63	126	113	87	35	70	1	
149	2 3 8 10. 11	0		2	4	8	16	32	64	128	107	65
	12 13 14 15 18	1	130	111	73	146	143	137	125	101	53	106
	21 23 27 32 34	2	63	126	103	57	114	79	9	18	36	72
	38 40 41 43 48	3	144	139	129	109	69	138	127	105	61	122
	50 51 52 55 56	4	95	41	82	15	30	60	120	91	33	66
	57 58 59 60 62	5	132	115	81	13	26	52	104	50	118	87
	65 66 70 71 72											
	74 75 77 78 79	6	25	50	100	51	102	55	110	71	142	135
	83 84 87 89 90	7	121	93	37	74	148:	147	145	141	133	117
	91 92 93 94 97	8	85	21	42	84	19	38	76	3	6	12
	98 99 101 106 108	9	24	48	96	43	86	23	46	92	35	70
	109 111 115 117 122	10	140	131	113	77	5	10	20	40	80	11
	126 128 131 134 135	11	22	44	88	27	54	108	67	134	119	89
	136 137 138 139 141											
	146 147	12	29	58	116	83	17	34	68	136	123	97
		13	45	90	31	62	124	99	49	98	47	94
		14	39	78	7	14	28	56	112	75	1	
151	6 7 12 13	0		6	36	65	88	75	148	133	43	107
	14 15 30 35	1	38	77	9	54	22	132	37	71	124	140
	48 51 52 54	2	85	57	40	89	81	33	47	131	31	35
	56 61 63 71	3	59	52	10	60	58	46	125	146	121	122
	77 82 89 93	4	128	13	78	15	90	87	69	112	68	106
	96 102 104 106	5	32	41	95	117	98	135	55	28	17	102
	108 109 111 112											
	114. 115 117 120	6	8	48	137	67	100	147	127	7	42	101
	126 129 130 133	7	2	12	72	130	25	150:	145	115	86	63
	134 140 141 146	8	76	3	18	108	44	113	74	142	97	129
		9	19	114	80	27	11	66	94	111	62	70
		10	118	104	20	120	116	92	99	141	91	93
		11	105	26	5	30	29	23	138	73	136	61
		12	64	82	39	83	45	119	110	56	34	53
		13	16	96	123	134	49	143	103	14	84	51
		14	4	24	144	109	50	149	139	79	21	126
		15	1									

	Primitive Wurzeln					N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
157	5	6	15	18.		0		5	25	125	154	142	82	96	9	45
	20	21	24	26		1	68	26	130	22	110	79	81	91	141	77
	34	38	43	53		2	71	41	48	83	101	34	13	65	11	55
	55	60	61	62		3	118	119	124	149	117	114	99	24	120	129
	63	66	69	70		4	17	85	111	84	106	59	138	62	153	137
	72	73	74	77		5	57	128	12	60	143	87	121	134	42	53
	80	83	84	85												
	87	88	91	94		6	108	69	31	155	147	107	64	6	30	150
	95	96	97	102		7	122	139	67	21	105	54	113	94	156:	152
	104	114	119	123		8	132	32	3	15	75	61	148	112	89	131
	131	133	136	137		9	27	135	47	78	76	66	16	80	86	116
	139.	142	151	152		10	109	74	56	123	144	92	146	102	39	38
						11	33	8	40	43	58	133	37	28	140	72
						12	46	73	51	98	19	95	4	20	100	29
						13	145	97	14	70	36	23	115	104	49	88
						14	126	2	10	50	93	151	127	7	35	18
						15	90	136	52	103	44	63	1			
163	2	3	7	11		0		2	4	8	16	32	64	128	93	23
	12	18	19	20		1	46	92	21	42	84	5	10	20	40	80
	29	32	42	44		2	160	157	151	139	115	67	134	105	47	94
	45	50	52	63		3	25	50	100	37	74	148	133	103	43	86
	66	67	68	70.		4	9	18	36	72	114	125	87	11	22	44
	72	73	75	76		5	88	13	26	52	104	45	90	17	34	68
	79	80	82	89												
	92	94	101	103		6	136	109	55	110	57	114	65	130	97	31
	106	107	108	109		7	62	124	85	7	14	28	56	112	61	122
	112	114	116	117		8	81	162:	161	159	155	147	131	99	35	70
	120	122	124	128		9	140	117	71	142	121	79	158	153	143	123
	129	130	137	139		10	83	3	6	12	24	48	96	29	58	116
	147	148	149	153		11	69	138	113	63	126	89	15	30	60	120
	154	159														
						12	77	154	145	127	91	19	38	76	152	141
						13	119	75	150	137	111	59	118	73	146	129
						14	95	27	54	108	53	106	49	98	33	66
						15	132	101	39	78	156	149	135	107	51	102
						16	41	82	1							
167	5	10.	13	15	17	0		5	25	125	124	119	94	136	12	60
	20	23	26	30	34	1	133	164	152	92	126	129	144	52	93	131
	35	37	39	40	41	2	154	102	9	45	58	123	114	69	11	55
	43	45	46	51	52	3	108	39	28	140	32	160	132	159	127	134
	53	55	59	60	67	4	2	10	50	83	81	71	21	105	24	120
	68	69	70	71	73	5	99	161	137	17	85	91	121	104	19	95

	Primitive Wurzeln					N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
167	74	78	79	80	82	6	141	37	18	90	116	79	61	138	22	110
	83	86	90	91	92	7	49	78	56	113	64	153	97	151	87	101
	95	101	102	103	104	8	4	20	100	166:	162	142	42	43	48	73
	105	106	109	110	111	9	31	155	107	34	3	15	75	41	38	23
	113	117	118	119	120	10	115	74	36	13	65	158	122	109	44	53
	123	125	129	131	134	11	98	156	112	59	128	139	27	135	7	35
	135	136	138	139	140											
	142	143	145	146	148	12	8	40	33	165	157	117	84	86	96	146
	149	151	153	155	156	13	62	143	47	68	6	30	150	82	76	46
	158	159	160	161	163	14	63	148	72	26	130	149	77	51	88	106
	164	165				15	29	145	57	118	89	111	54	103	14	70
						16	16	80	66	163	147	67	1			
173	2	3	5	7	8	0		2	4	8	16	32	64	128	83	166
	11	12	17	18	19	1	159	145	117	61	122	71	142	111	49	98
	20	26	27	28	30	2	23	46	92	11	22	44	88	3	6	12
	32	39	42	44	45	3	24	48	96	19	38	76	152	131	89	5
	46	48	50	53	58	4	10	20	40	80	160	147	121	69	138	103
	59	61	62	63	65	5	33	66	132	91	9	18	36	72	144	115
	66	68	69	70	71											
	72	74	75	76	79	6	57	114	55	110	47	94	15	30	60	120
	82.	86	87	91.	94	7	67	134	95	17	34	68	136	99	25	50
	97	98	99	101	102	8	100	27	54	108	43	86	172:	171	169	165
	103	104	105	107	108	9	157	141	109	45	90	7	14	28	56	112
	110	111	112	114	115	10	51	102	31	62	124	75	150	127	81	162
	120	123	125	127	128	11	151	129	85	170	167	161	149	125	77	154
	129	131	134	141	143											
	145	146	147	153	154	12	135	97	21	42	84	168	163	153	133	93
	155	156	161	162	165	13	13	26	52	104	35	70	140	107	41	82
	166	168	170	171		14	164	155	137	101	29	58	116	59	118	63
						15	126	79	158	143	113	53	106	39	78	156
						16	139	105	37	74	148	123	73	146	119	65
						17	130	87	1							
179	2	6	7	8	10.	0		2	4	8	16	32	64	128	77	154
	11	18	21	23	24	1	129	79	158	137	95	11	22	44	88	176
	26	28	30	32	33	2	173	167	155	131	83	166	153	127	75	150
	34	35	37	38	40	3	121	63	126	73	146	113	47	94	9	18
	41	44	50	53	54	4	36	72	144	109	39	78	156	133	87	174
	55	58	62	63	69	5	169	159	139	99	19	38	76	152	125	71
	71	72	73	78	79											
	84	86	90	91	92	6	142	105	31	62	124	69	138	97	15	30
	94	96	97	98	99	7	60	120	61	122	65	130	81	162	145	111
	102	103	104	105	109	8	43	86	172	165	151	123	67	134	89	178:
	111	112	113	114	115	9	177	175	171	163	147	115	51	102	25	50
	118	119	120	122	123	10	100	21	42	84	168	157	135	91	3	6
	127	128	130	131	132	11	12	24	48	96	13	26	52	104	29	58

	Primitive Wurzeln					N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
179	133	134	136	137	140	12	116	53	106	33	66	132	85	170	161	143
	143	148	150	152	154	13	107	35	70	140	101	23	46	92	5	10
	157	159	160	162	163	14	20	40	80	160	141	103	27	54	108	37
	164	165	166	167	170	15	74	148	117	55	110	41	82	164	149	119
	174	175	176			16	59	118	57	114	49	98	17	34	68	136
						17	93	7	14	28	56	112	45	90	1	
181	2	10.	18	21		0		2	4	8	16	32	64	128	75	150
	23	24	28	41		1	119	57	114	47	94	7	14	28	56	112
	47	50	53	54		2	43	86	172	163	145	109	37	74	148	115
	57	58	63	66		3	49	98	15	30	60	120	59	118	55	110
	69	76	77	78		4	39	78	156	131	81	162	143	105	29	58
	83	84	85	90		5	116	51	102	23	46	92	3	6	12	24
	91	96	97	98												
	103	104	105	112		6	48	96	11	22	44	88	176	171	161	141
	115	118	123	124		7	101	21	42	84	168	155	129	77	154	127
	127	128	131	134		8	73	146	111	41	82	164	147	113	45	90
	140	153	157	158		9	180 :	179	177	173	165	149	117	53	106	31
	160	163	171	179		10	62	124	67	134	87	174	167	153	125	69
						11	138	95	9	18	36	72	144	107	33	66
						12	132	83	166	151	121	61	122	63	126	71
						13	142	103	25	50	100	19	38	76	152	123
						14	65	130	79	158	135	89	178	175	169	157
						15	133	85	170	159	137	93	5	10	20	40
						16	80	160	139	97	13	26	52	104	27	54
						17	108	35	70	140	99	17	34	68	136	91
						18	1									
191	19	21	22	28		0		19	170	174	59	166	98	143	43	53
	29	33	35	42		1	52	33	54	71	12	37	130	178	135	82
	44	47	53	56		2	30	188	134	63	51	14	75	88	144	62
	57	58	61	62		3	32	35	92	29	169	155	80	183	39	168
	63	71	73	74		4	136	101	9	171	2	38	149	157	118	141
	76	83	87	88		5	5	95	86	106	104	66	108	142	24	74
	89	91	93	94												
	95	99	101	105		6	69	165	79	164	60	185	77	126	102	28
	106	110	111	112		7	150	176	97	124	64	70	184	58	147	119
	113	114	116	119		8	160	175	78	145	81	11	18	151	4	76
	123	124	126	127		9	107	123	45	91	10	190 :	172	21	17	132
	131	132	137	140		10	25	93	48	148	138	139	158	137	120	179
	141	143	145	146		11	154	61	13	56	109	161	3	57	128	140
	148	151	157.	164												
	165	167	168	171		12	177	116	103	47	129	159	156	99	162	22
	173	174	175	176		13	36	111	8	152	23	55	90	182	20	189
	178	179	181	182		14	153	42	24	73	50	186	96	105	85	87
	183	187	188	189		15	125	83	49	167	117	122	26	112	27	131

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	2	4	5	6	7	8	9
191		16	6	114	65	89	163	41	15	94	67	127
		17	121	7	133	44	72	31	16	113	46	110
		18	180	173	40	187	115	84	68	146	100	181
		19	1									
193	5 10. 15 17	0		5	25	125	46	37	185	153	186	158
	19 22 26 30	1	18	90	64	127	56	87	49	52	67	142
	34 37 38 40	2	131	76	187	163	43	22	110	164	48	47
	41 44 45 47	3	42	17	85	39	2	10	50	57	92	74
	51 52 53 57	4	177	113	179	123	36	180	128	61	112	174
	58 61 66 70	5	98	104	134	91	69	152	181	133	86	44
	73 77 78 79											
	80 82 90 91	6	27	135	96	94	84	34	170	78	4	20
	102 103 111 113	7	100	114	184	148	161	33	165	53	72	167
	114 115 116 120	8	63	122	31	155	3	15	75	182	138	111
	123 127 132 135	9	169	73	172	88	54	77	192:	188	168	68
	136 140 141 142	10	147	156	8	40	7	35	175	103	129	66
	146 148 149 152	11	137	106	144	141	126	51	62	117	6	30
	153 155 156 159											
	163 167 171 174	12	150	171	83	29	145	146	151	176	108	154
	176 178 183 188	13	191	143	143	136	101	119	16	80	14	70
		14	157	13	65	132	81	19	95	89	59	102
		15	124	41	12	60	107	149	166	58	97	99
		16	109	159	23	115	189	173	93	79	9	45
		17	32	160	28	140	121	26	130	71	162	38
		18	190	178	118	11	55	82	24	120	21	105
		19	139	116	1							
197	2 3 5 8 11	0		2	4	8	16	32	64	128	59	118
	12 13 17 18 21	1	39	78	156	115	33	66	132	67	134	71
	27 30 31 32 35	2	142	87	174	151	105	13	26	52	104	11
	38 44 45 46 48	3	22	44	88	176	155	113	29	58	116	35
	50 52 56 57 58	4	70	140	83	166	135	73	146	95	190	183
	66 67 71 72 73.	5	169	141	85	170	143	89	178	159	121	45
	74 75 78 79 80											
	82 86 89 91 94	6	90	180	163	129	61	122	47	94	188	179
	95 98 99 102 103	7	161	125	53	106	15	80	60	120	43	86
	106 108 111 115 117	8	172	147	97	194	191	185	173	149	101	5
	118 119 122 123 124.	9	10	20	40	80	160	123	49	98	196:	195
	125 126 130 131 139	10	193	189	181	165	133	69	138	79	158	119
	140 141 145 147 149	11	41	82	164	131	65	130	63	126	55	110
	151 152 153 159 162											
	165 166 167 170 176	12	23	46	92	184	171	145	93	186	175	153
	179 180 184 185 186	13	109	21	42	84	168	139	81	162	127	57
	189 192 194 195	14	114	31	62	124	51	102	7	14	28	56

	Primitive Wurzeln				N.	Reste									
						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
197					15	112	27	54	108	19	38	76	152	107	17
					16	34	68	136	75	150	103	9	18	36	72
					17	144	91	182	167	137	77	154	111	25	50
					18	100	3	6	12	24	48	96	192	187	177
					19	157	117	37	74	148	99	1			
199	3	6	15	22	0		3	9	27	81	44	132	197	193	181
	30	34	38	39	1	145	37	111	134	4	12	36	108	125	176
	41	44	48	54	2	130	191	175	127	182	148	46	138	16	48
	68	69	71	73	3	144	34	102	107	122	167	103	110	131	194
	75	77	84	87	4	184	154	64	192	178	136	10	30	90	71
	95	97	99	105	5	14	42	126	179	139	19	57	171	115	146
	108	110	113	118											
	119	120	127.	129	6	40	120	161	85	56	168	106	119	158	76
	133	134	142	143	7	29	87	62	186	160	82	47	141	25	75
	146	148	149	150	8	26	78	35	105	116	149	49	147	43	129
	152	153	154	163	9	188	166	101	101	104	113	140	22	66	198 :
	164	166	167	168	10	196	190	172	118	155	67	2	6	18	54
	170	173	176	179	11	162	88	65	195	187	163	91	74	23	69
	183	185	186	189											
	190	192	195	197	12	8	24	72	17	51	153	61	183	151	55
					13	165	97	92	77	32	96	89	68	5	15
					14	45	135	7	21	63	189	169	109	128	185
					15	157	73	20	60	180	142	28	84	53	159
					16	79	38	114	143	31	93	80	41	123	170
					17	112	137	13	39	117	152	58	174	124	173
					18	121	164	94	83	50	150	52	156	70	11
					19	33	99	98	95	86	59	177	133	1	
211	2	3	7.	17.	0		2	4	8	16	32	64	128	45	90
	22	29	35	39	1	180	149	87	174	137	63	126	41	82	164
	41	48	57	72	2	117	23	46	92	184	157	103	206	201	191
	75	85	91	92	3	171	131	51	102	204	297	183	155	99	198
	106	108	112	116	4	185	159	107	3	6	12	24	48	96	192
	118	127.	130	131	5	173	135	59	118	25	50	100	200	189	167
	133	141	142.	145											
	149	152	155	158	6	123	35	70	140	69	138	65	130	49	98
	159	160	162	164.	7	196	181	151	91	182	153	95	190	169	127
	165	166	167	174	8	43	86	172	133	55	110	9	18	36	72
	175	181	187	191	9	144	77	154	97	194	177	143	75	150	89
	195.	202	205	207	10	178	145	79	158	105	210 :	209	207	203	195
					11	179	147	83	166	121	31	62	124	37	74
					12	148	85	170	129	47	94	188	165	119	27
					13	54	108	5	10	20	40	80	160	109	7

	Primitive Wurzeln					N.	Reste									
							0	1	2	2	4	5	6	7	8	
211						14	14	28	56	112	13	26	52	104	208	205
						15	199	187	163	115	19	38	76	152	93	186
						16	161	111	11	22	44	88	176	141	71	142
						17	73	146	81	162	113	15	30	60	120	29
						18	58	116	21	42	84	168	125	39	78	156
						19	101	202	193	175	139	67	134	57	114	17
						20	34	68	136	61	122	33	66	132	53	106
						21	1									
223	3	5	6	10.		0		3	9	27	81	20	60	180	94	59
	11	12	20	21		1	177	85	32	96	65	195	139	194	136	185
	22	23	24	35		2	109	104	89	44	132	173	73	219	211	187
	42	44	45	46		3	115	122	143	206	172	70	210	184	106	95
	48	51	57	61		4	62	186	112	113	116	125	152	10	30	90
	67	70	71	75		5	47	141	200	154	16	48	144	209	181	97
	77	79	80	84												
	85	88	90	92		6	68	204	166	52	156	22	66	198	148	221
	93	96	97	99		7	217	205	169	61	183	103	86	35	105	92
	102	107	113	114		8	53	159	31	93	56	168	58	174	76	5
	117	122	123	129		9	15	45	135	182	100	77	8	24	72	216
	134	137	140	142		10	202	160	34	102	83	26	78	11	33	99
	145	147	149	150		11	74	222	220	214	196	142	203	163	43	129
	151	154	158	160												
	161	165	168	170		12	164	46	138	191	127	158	28	84	29	87
	173	176	180	185		13	38	114	119	134	179	91	50	150	4	12
	186	187	192	194		14	36	108	101	80	17	51	153	13	39	117
	198	204	205	214		15	128	161	37	111	110	107	98	71	213	193
						16	133	176	82	23	69	207	175	79	14	42
						17	126	155	19	57	171	67	201	157	25	75
						18	2	6	18	54	162	40	120	137	188	118
						19	131	170	64	192	130	167	55	165	49	147
						20	218	208	178	88	41	123	146	215	199	151
						21	7	21	63	189	121	140	197	145	212	190
						22	124	149	1							
227	2	5	6	8	13	0		2	4	8	16	32	64	128	29	58
	14	15	17	18	20	1	116	5	10	20	40	80	160	93	186	145
	22	24	31	32	35	2	63	126	25	50	100	200	173	119	11	22
	37	38	39	41	42	3	44	88	176	125	23	46	92	184	141	55
	45	46	50	51	52	4	110	220	213	199	171	115	3	6	12	24
	54	55	56	58	60	5	48	96	192	157	87	174	121	15	30	60
	61	66	67	68	72											
	80	83	86	88	91	6	120	13	26	52	104	208	189	151	75	150
	93	94	95	96	98	7	73	146	65	130	33	66	132	37	74	148
	105	106	107	111	114	8	69	138	49	98	196	165	103	206	185	143

	Primitive Wurzeln					N.	Reste									
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
227	115	117	118	119	123	9	59	118	9	18	36	72	144	61	122	17
	124	125	126	127	128	10	34	68	136	45	90	180	133	39	78	156
	130	135	137	138	140	11	85	170	113	226 :	225	223	219	211	195	163
	142	143	145	146	148											
	149	150	151	152	153	12	99	198	169	111	222	217	207	187	147	67
	154	156	157	158	162	13	134	41	82	164	101	202	177	127	27	54
	163.	164	165	168	170	14	108	216	205	183	139	51	102	204	181	135
	174	178	179	180	183	15	43	86	172	117	7	14	28	56	112	224
	184	187	191	193	194	16	221	215	203	179	131	35	70	140	53	106
	197	198	199	200	201	17	212	197	167	107	214	201	175	123	19	38
	202	204	206	208	211											
	215	216	217	218	220	18	76	152	77	154	81	162	97	194	161	95
	223	224				19	190	153	79	158	89	178	29	31	62	124
						20	21	42	84	168	109	218	209	191	155	83
						21	166	105	210	193	159	91	182	137	47	94
						22	188	149	71	142	57	114	1			
229	6	7	10.	23	24	0		6	36	216	151	219	169	98	130	93
	28	29	31	35	38	1	100	142	165	74	215	145	183	182	176	140
	39	40	41	47	50	2	153	2	12	72	203	73	209	109	196	31
	59	63	65	66	67	3	186	200	55	101	148	201	61	137	135	123
	69	72	73	74	77	4	51	77	4	24	144	177	146	189	218	163
	79	87	90	92	96	5	62	143	171	110	202	67	173	122	45	41
	98	102	105	110	112											
	113	116	117	119	124	6	17	102	154	8	48	59	125	63	149	207
	127	131	133	137	139	7	97	124	57	113	220	175	134	117	15	90
	142	150	152	155	156	8	82	34	204	79	16	96	118	21	126	69
	157	160	162	163	164	9	185	194	19	114	226	211	121	39	5	30
	166	170	179	182	188	10	180	164	68	179	158	92	192	7	42	23
	189	190	191	194	198	11	138	141	159	38	228:	223	193	13	78	10
	200	201	205	206	219											
	222	223				12	60	131	99	136	129	87	64	155	14	84
						13	46	47	53	89	76	227	217	157	26	156
						14	20	120	33	198	43	29	174	128	81	28
						15	168	92	94	106	178	152	225	205	85	52
						16	83	40	11	66	167	86	58	119	29	162
						17	56	107	184	188	212	127	75	221	181	170
						18	104	166	80	22	132	105	172	116	9	54
						19	95	112	214	139	147	195	25	150	213	133
						20	111	208	103	160	44	35	210	115	3	18
						21	108	190	224	199	49	65	161	50	71	197
						22	37	222	187	206	91	88	70	191	1	
233						1		3	9	27	81	10	30	90	37	111
						2	100	67	201	137	178	68	204	146	205	149
						3	214	176	62	186	92	43	129	154	229	221

	Primitive Wurzeln					N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
233	3	5	6	10.	11	3	197	125	142	193	113	106	85	22	66	198
	17	20	21	22	24	4	128	151	220	194	116	115	112	103	76	228
	27	34	35	39	40	5	218	188	98	61	183	83	16	48	144	199
	41 ·	42	43	44	45											
	47	48	53	54	57	6	131	160	14	42	126	145	202	140	187	95
	59	61	65	67	68	7	52	156	2	6	18	54	162	20	60	180
	69	70	73	75	77	8	74	222	200	134	169	41	123	136	175	59
	78	79	80	82	83	9	177	65	195	119	124	139	184	86	25	75
	84	86	87	88	90	10	225	209	161	17	51	153	226	212	170	44
	93	94	95	96	99	11	132	163	23	69	207	155	232:	230	224	206
	103	106	108	111	114											
	115	118	119	122	125	12	152	223	203	143	196	122	133	166	32	96
	127	130	134	137	138	13	55	165	29	87	28	84	19	57	171	47
	139	140	143	145	146	14	141	190	104	79	4	12	36	108	91	40
	147	149	150	151	153	15	120	127	148	211	167	35	105	82	13	39
	154	155	156	158	160	16	117	118	121	130	157	5	15	45	135	172
	163	164	165	166	168	17	50	150	217	185	89	34	102	73	219	191
	172	174	176	179	180											
	185	186	188	189	190	18	107	88	31	93	46	138	181	77	231	227
	191	192	193	194	198	19	215	179	71	213	173	53	159	11	33	99
	199	206	209	211 ·	212	20	64	192	110	97	58	174	56	168	38	114
	213	216	222	223	227	21	109	94	49	147	208	158	8	24	72	216
	228	230				22	182	80	7	21	63	189	101	70	210	164
						23	26	78	1							
239	7	13	14	19		0		7	49	104	11	77	61	188	121	130
	21	26	35.	37		1	193	156	136	235	211	43	62	195	120	234
	39	41	42	43		2	204	233	197	184	93	173	16	112	67	230
	46	47	53.	56		3	176	37	20	140	24	168	220	106	25	175
	57	59	63	65.		4	30	210	36	13	91	159	157	143	45	76
	69	70	74.	77		5	54	139	17	119	116	95	187	114	81	89
	78	79.	82	84												
	86	89	92.	94		6	145	59	174	23	161	171	2	14	98	208
	95.	97	103	104		7	22	154	122	137	3	21	147	73	33	231
	105	106	112.	114		8	183	86	124	151	101	229	169	227	155	129
	115	117	118	119		9	186	107	32	224	134	221	113	74	40	41
	123	126	129	130		10	48	97	201	212	50	111	60	181	72	26
	131	137	140	143		11	182	79	75	47	90	152	108	39	34	238:
	146	148	149	151.												
	152	154	156	158		12	232	190	135	228	162	178	51	118	109	46
	159	167	171	173		13	83	103	4	28	196	177	44	69	5	35
	175	177	178.	179		14	6	42	55	146	66	223	127	172	9	63
	181	184	185	189.		15	202	219	99	215	71	19	133	214	64	209
	190	191	194.	205.		16	29	203	226	148	80	82	96	194	163	185
	206	207	208.	209		17	100	222	120	123	144	52	125	158	150	94

	Primitive Wurzeln	N.	Reste									
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
239	210. 212 214 219	18	180	65	216	78	68	237	225	141	31	217
	221 222 223 224	19	85	117	102	236	218	92	166	206	8	56
	227 228 230 231	20	153	115	88	138	10	70	12	84	110	53
	234 235. 236 237	21	132	207	15	105	18	126	165	199	198	191
		22	142	38	27	189	128	179	58	167	213	57
		23	160	164	192	149	87	131	200	205	1	
241	7 13 14. 31	0		7	49	102	232	178	41	46	81	85
	34 35 37 39	1	113	68	235	199	188	111	54	137	236	206
	42 46 51 52	2	237	213	45	74	36	11	77	57	158	142
	55 56 62. 66	3	30	210	24	168	212	38	25	175	20	140
	68. 69 70 71	4	16	112	61	186	97	197	174	13	91	155
	74 78 84 86	5	121	124	145	51	116	89	141	23	161	163
	92 95 99 104											
	109 110 112. 114	6	177	34	238	220	94	176	27	189	118	103
	127 129. 131 132	7	239	227	143	37	18	126	159	149	79	71
	137 142 146 149	8	15	105	12	84	106	19	133	208	10	70
	155 157 163 167	9	8	56	151	93	169	219	87	127	166	198
	170 171 172 173.	10	181	62	193	146	58	165	191	132	201	202
	175 179. 185 186	11	209	17	119	110	47	88	134	215	59	172
	189 190 195 199											
	202 204 206 207	12	240:	234	192	139	9	63	200	195	160	156
	210 227. 228 234	13	128	173	6	42	53	130	187	104	5	35
		14	4	28	196	167	205	230	164	184	83	99
		15	211	31	217	73	29	203	216	66	221	101
		16	225	129	180	55	144	44	67	228	150	86
		17	120	117	96	190	125	152	100	218	80	78
		18	64	207	3	21	147	65	214	52	123	138
		19	2	14	98	204	223	115	82	92	162	170
		20	226	136	229	157	135	222	108	33	231	171
		21	233	185	90	148	72	22	154	114	75	43
		22	60	179	48	95	183	76	50	109	40	39
		23	32	224	122	131	194	153	107	26	182	69
		24	1									
251	6 11 14 18 19	0		6	36	216	41	246	221	71	175	46
	24 26 29 30 33	1	25	150	147	129	21	126	3	18	108	146
	34 37 42 43 44	2	123	136	161	213	23	138	75	199	190	136
	46 53 54 55 56	3	63	127	9	54	73	187	118	206	232	137
	57 59 61 62 70	4	69	163	225	95	68	157	189	130	27	162
	71 72 76 77 78	5	219	59	103	116	194	160	207	238	173	34
	82 87 90 95 96											
	97 98 99 104 107	6	204	220	65	139	81	235	155	177	58	97
	109 111. 116 120 127	7	80	229	119	212	17	102	110	158	195	166
	129 130 132 133 134	8	243	203	214	29	174	40	240	185	106	134
	136 137 139 141 143	9	51	55	79	223	83	247	227	107	140	87

	Primitive Wurzeln					N.	Reste									
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
251	145	146	148	150	158	10	20	120	218	53	67	151	153	165	237	167
	159	162	163	165	166	11	249	239	179	70	169	10	60	109	152	159
	167	168	170	172	176	12	201	202	208	244	209	250 :	245	215	35	210
	177	178	183	184	185	13	5	30	180	76	205	226	101	104	122	230
	186	191	193	199	202	14	125	248	233	143	105	128	15	90	38	228
	203	206	210	212.	213.	15	113	176	52	61	115	188	124	242	197	178
	215	216	220	223	224.	16	64	133	45	19	114	182	88	26	156	183
	228	229	230	234	236	17	94	62	121	224	89	32	192	148	135	57
	238	239	242	244.	248	18	91	44	13	78	217	47	31	186	112	170
						19	16	96	74	193	154	171	22	132	39	234
						20	149	141	93	56	85	8	48	37	222	77
						21	211	11	66	145	117	200	196	172	28	168
						22	4	24	144	111	164	231	131	33	198	184
						23	100	98	86	14	84	2	12	72	181	82
						24	241	191	142	99	92	50	49	43	7	42
						25	1									
257	3	5	6	7	10.	0		3	9	27	81	243	215	131	136	151
	12	14	19	20	24	1	196	74	222	152	199	83	249	233	185	41
	27	28	33	37	38	2	123	112	79	237	197	77	231	179	23	69
	39	40	41	43	45	3	207	107	64	192	62	186	44	132	139	160
	47	48	51	53	54	4	223	155	208	210	73	219	143	172	2	6
	55	56	63	65	66	5	18	54	162	229	173	5	15	45	135	148
	69	71	74	75	76	6	187	47	141	166	241	209	113	82	246	224
	77	78	80	82	83	7	158	217	137	154	205	101	46	138	157	214
	85	86	87	90	91	8	128	127	124	115	88	7	21	63	189	53
	98	94	96	97	101	9	159	220	146	181	29	87	4	12	36	108
	102	103	105	106	107	10	67	201	89	10	30	90	13	89	117	94
	108	109	110	112	115	11	25	75	225	161	226	164	235	191	59	177
	119	125	126	127	130	12	17	51	158	202	92	19	57	171	256 :	254
	131	132	138	142	145	13	248	230	176	14	42	126	121	106	61	183
	147	148	149	150	151	14	35	105	58	174	8	24	72	216	134	145
	152	154	155	156	160	15	178	20	60	180	26	78	234	188	50	150
	161	163	164	166	167	16	193	65	195	71	213	125	118	97	34	102
	170	171	172	174	175	17	49	147	184	38	114	85	255	251	239	203
	177	179	180	181	182	18	95	28	84	252	242	212	122	109	70	210
	183	186	188	191	192	19	116	91	16	48	144	175	11	33	99	40
	194	201	202	203	204	20	120	103	52	155	211	119	100	43	129	130
	206	209	210	212	214	21	133	142	169	250	236	194	68	204	98	37
	216	217	218	219	220	22	111	76	228	170	253	245	221	149	190	56
	224	229	230	233	237	23	168	247	227	167	244	218	140	163	232	182
	238	243	245	247	250	24	32	96	31	93	22	66	198	80	240	206
	251	252	254			25	104	55	165	238	200	86	1			

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
263	5 7 10. 14 15 19	0		5	25	125	99	232	108	14	70	87
	20 21 28 29 30 38	1	172	71	92	197	196	191	166	41	205	236
	40 41 42 45 47 53	2	128	114	44	220	48	240	148	214	18	90
	55 56 57 58 59 60	3	187	146	204	231	103	252	208	251	203	226
	63 65 67 71 73 76	4	78	127	109	19	95	212	8	40	200	211
	77 79 80 82 84 85	5	3	15	75	112	34	170	61	42	210	261
	87 90 91 94 97 101											
	106 107 110 112 113 114	6	253	213	13	65	62	47	235	123	89	182
	115 116 118 119 120 123	7	121	79	132	134	144	194	181	116	54	7
	125 126 127 130 131 134	8	35	175	86	167	46	230	98	227	83	152
	135 139 141 142 146 152	9	234	118	64	57	22	110	24	120	74	107
	154 155 158 159 160 161	10	9	45	225	73	102	247	183	126	104	257
	163 164 165 167 168 170	11	233	113	39	195	186	141	179	106	4	20
	171 174 175 177 180 182											
	185 188 189 191 193 194	12	100	237	133	139	169	56	17	85	162	21
	195 197 199 201 202 209	13	105	262 :	258	238	138	164	31	155	249	193
	211 212 213 214 215 217	14	176	91	192	171	66	67	72	97	222	58
	219 220 224 226 227 228	15	27	135	149	219	43	215	23	115	49	245
	229 230 231 232 236 237	16	173	76	117	59	32	160	11	55	12	60
	238 239 240 241 245 246	17	37	185	136	154	244	168	51	255	223	63
	247 250 251 252 254 255											
	257 259 260 261	18	52	260	248	188	151	229	93	202	221	53
		19	2	10	50	250	198	201	216	28	140	174
		20	81	142	184	131	129	119	69	82	147	209
		21	256	228	88	177	96	217	33	165	36	180
		22	111	29	145	199	206	241	253	239	143	189
		23	156	254	218	38	190	161	16	80	137	159
		24	6	30	150	224	68	77	122	84	157	259
		25	243	163	26	130	124	94	207	246	178	101
		26	242	158	1							
269	2 3 7 8 10. 12	0		2	4	8	16	32	64	128	265	243
	15 17 18 19 22 26	1	217	165	61	122	244	219	169	69	138	7
	27 28 29 31 32 33	2	14	28	56	112	224	179	89	178	87	174
	35 39 40 42 46 48	3	79	158	47	94	188	107	214	159	49	98
	50 59 60 63 68 69	4	196	123	246	223	177	85	170	71	142	15
	71 72 74 75 76 77	5	30	60	120	240	211	153	37	74	148	27
	83 85 86 88 90 91											
	94 95 98 101 102 104	6	54	108	216	163	57	114	228	187	105	210
	106 107 108 109 110 111	7	151	33	66	132	264	259	249	229	189	109
	112 113 114 116 122 123	8	218	167	65	130	260	251	233	197	125	250
	124 128 129 130 132 134	9	231	193	117	234	199	129	258	247	225	181
	135 137 139 140 141 145	10	93	186	103	206	143	17	34	68	136	3
	146 147 152 155 156 157	11	6	12	24	48	96	192	115	230	191	113

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
269	158 159 160 161 162 163	12	226	183	97	194	119	238	207	145	21	42
	165 167 168 171 174 175	13	84	168	67	134	268:	267	265	261	253	237
	178 179 181 183 184 186	14	205	141	13	26	52	104	208	147	25	50
	192 193 194 195 197 198	15	100	200	131	262	255	241	213	157	45	90
	200 201 206 209 210 219	16	180	91	182	95	190	111	222	175	81	162
	221 223 227 229 230 234	17	55	110	220	171	73	146	23	46	92	184
	236 237 238 240 241 242											
	243 247 250 251 252 254	18	99	198	127	254	239	209	149	29	58	116
	257 259 261 262 266 267	19	232	195	121	242	215	161	53	106	212	155
		20	41	82	164	59	118	236	203	137	5	10
		21	20	40	80	160	51	102	204	139	9	18
		22	36	72	144	19	38	76	152	35	70	140
		23	11	22	44	88	176	83	166	63	126	252
		24	235	201	133	266	263	257	245	221	173	77
		25	154	39	78	156	43	86	172	75	150	31
		26	62	124	248	227	185	101	202	135	1	
271	6 15 21 26	0		6	36	216	212	188	44	264	229	19
	38 42 43 46	1	114	142	39	234	49	23	138	15	90	269
	48 51. 52. 58	2	259	199	110	118	166	183	14	84	233	43
	59 66 71 73.	3	258	193	74	173	225	266	241	91	4	24
	75 76 91 92	4	144	51	35	210	176	243	103	76	185	26
	94. 95 96 97.	5	156	123	196	92	10	60	89	263	223	254
	101 107 108 109											
	116 118 120 133.	6	169	201	122	190	56	65	119	172	219	230
	135. 137 142. 143	7	25	150	87	251	151	93	16	96	34	204
	147. 149 150. 159	8	140	27	162	159	141	33	198	104	82	221
	161 168. 172 182.	9	242	97	40	240	85	239	79	203	134	262
	186 189 193. 197	10	217	218	224	260	205	146	63	107	100	58
	201. 203 204 208.	11	77	191	62	101	64	113	136	3	18	108
	209 210 215 218.											
	221 222 226 231	12	106	94	22	132	250	145	57	71	155	117
	234 235 249 251	13	160	147	69	143	45	270:	265	235	55	59
	253 254 255. 257.	14	83	227	7	42	252	157	129	232	37	222
	260 264 267 269	15	248	133	256	181	2	12	72	161	153	105
		16	88	257	187	38	228	13	78	197	98	46
		17	5	30	180	267	247	127	220	236	61	95
		18	28	168	195	86	245	115	148	75	179	261
		19	211	182	8	48	17	102	70	149	81	215
		20	206	152	99	52	41	246	121	184	20	120
		21	178	255	175	237	67	131	244	109	112	130
		22	238	73	167	189	50	29	174	231	31	186
		23	32	192	68	137	9	54	53	47	11	66

	Primitive Wurzeln				N.	Reste									
						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9.
271					24	125	208	164	171	213	194	80	209	170	207
					25	158	135	268	253	163	165	177	249	139	21
					26	126	214	200	116	154	111	124	202	128	226
					27	1									
277	5	6	11	17	0		5	25	125	71	78	113	11	55	275
	18	20	24	31	1	267	227	27	135	121	51	255	167	4	20
	34	43	44	45	2	100	223	7	35	175	44	220	269	237	77
	46	50	53	56	3	108	263	207	204	189	114	16	80	123	61
	58	65	68	72	4	28	140	146	176	49	245	117	31	155	221
	77	78	80.	93	5	274	262	202	179	64	43	215	244	112	6
	94	96	97	98											
	99	101	103	105	6	30	150	196	149	191	124	66	53	265	217
	107	110	111	114	7	254	162	256	172	29	145	171	24	120	46
	115	119	124	126	8	230	42	210	219	264	212	229	37	185	94
	127	134	135	137	9	193	134	116	26	130	96	203	184	89	168
	140	142	143	150	10	9	45	225	17	85	148	186	99	218	259
	151	153	158	162	11	187	104	243	107	258	182	79	118	36	180
	163	166	167	170											
	172	174	176	178	12	69	68	63	38	190	119	41	205	194	139
	179	180	181	183	13	141	151	201	174	39	195	144	166	276	272
	184	197	199	200	14	252	152	206	199	164	266	222	2	10	50
	205	209	212	219	15	250	142	156	226	22	110	273	257	177	54
	221	224	227	231	16	270	242	102	233	57	8	40	200	169	14
	232	233	234	246.	17	70	73	88	163	261	197	154	216	249	137
	253	257	259	260											
	263	266	271	272	18	131	101	228	32	160	246	122	56	3	15
					19	75	98	213	234	62	33	165	271	247	127
					20	81	128	86	153	211	224	12	60	23	115
					21	21	105	248	132	106	253	157	231	47	235
					22	67	58	13	65	48	240	92	183	84	143
					23	161	251	147	181	74	93	188	109	268	232
					24	52	260	192	129	91	178	59	18	90	173
					25	34	170	19	95	198	159	241	97	208	209
					26	214	239	87	158	236	72	83	138	136	126
					27	76	108	238	82	133	111	1			
281	3	11	12	13	0		3	9	27	81	243	167	220	98	13
	15	19	21	22	1	39	117	70	210	68	204	50	150	169	226
	23	24	26	27	2	116	67	201	41	123	88	264	230	128	103
	30	41	42	44	3	28	84	252	194	20	60	180	259	215	83
	46	48	51	52	4	249	185	247	260	218	92	276	266	236	146
	54.	55	71	74	5	157	190	8	24	72	216	86	258	212	74

	Primitive Wurzeln				N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
281	75	76	82	83.	6	222	104	31	93	279	275	263	227	119	76
	84	87	91	94	7	228	122	85	255	203	47	141	142	145	154
	95	96	97	103	8	181	262	224	110	49	147	160	199	35	105
	104	105	107	108	9	34	102	25	75	225	113	58	174	241	161
	110	115	117.	120	10	202	44	132	115	64	192	14	42	126	97
	122	127	131	133.	11	10	30	90	270	248	182	265	233	137	130
	148.	150	154	159											
	161	164.	166	171	12	109	46	138	133	118	73	219	95	4	12
	173	174	176	177	13	36	108	43	129	106	37	111	52	156	187
	178	184	185	186	14	280 :	278	272	254	200	38	114	61	183	268
	187	190	194	197	15	242	164	211	71	213	77	231	131	112	55
	198.	199	205	206	16	165	214	80	240	158	193	17	51	153	178
	207	210	226	227.	17	253	197	29	87	261	221	101	22	66	198
	229	230	233	235											
	237	239	240	251	18	32	96	7	21	63	189	5	15	45	135
	254	255	257	258	19	124	91	273	257	209	65	195	23	69	207
	259	260	262	266	20	59	177	250	188	2	6	18	54	162	205
	268	269	270	278	21	53	159	196	26	78	234	140	139	136	127
					22	100	19	57	171	232	134	121	82	246	176
					23	247	179	256	206	56	168	223	107	40	120
					24	79	237	149	166	217	89	267	239	155	184
					25	271	251	191	11	33	99	16	48	144	151
					26	172	235	143	148	163	208	62	186	277	269
					27	245	173	238	152	175	244	170	229	125	94
					28	1									
283	3	5	12	14	0		3	9	27	81	243	163	206	52	156
	17	18	20	22	1	185	272	250	184	269	241	157	188	281	277
	26	31	35	37	2	265	229	121	80	240	154	179	254	196	22
	46	47	48	50	3	66	198	28	84	252	190	4	12	36	108
	55	56	65	68	4	41	123	86	258	208	58	174	239	151	170
	69	72	75	80	5	227	115	62	186	275	259	211	67	201	37
	82	87	88	98											
	104	107	109	114	6	111	50	150	167	218	88	264	226	112	53
	118	119	123	124	7	159	194	16	48	144	149	164	209	61	183
	126	133	139	140	8	266	232	130	107	38	114	59	177	248	178
	145	146	147	148	9	251	187	278	268	238	148	161	200	34	102
	153	154	162	166	10	23	69	207	55	165	212	70	210	64	192
	170	171	173	178	11	10	30	90	270	244	166	215	79	237	145
	180	182	183	184											
	186	187	188	189	12	152	173	236	142	143	146	155	182	263	223
	190	191	192	193	13	103	26	78	234	136	125	92	276	262	220
	194	198	200	202	14	94	282 :	280	274	256	202	40	120	77	231
	206	209	210	213	15	127	98	11	33	99	14	42	126	95	2
	220	221	224	226	16	6	18	54	162	203	43	129	104	29	87
	231	234	242	243	17	261	217	85	255	199	31	93	279	271	247

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
283	247 249 255 258	18	175	242	160	197	25	75	225	109	44	132
	259. 260 270 272	19	113	56	168	221	97	8	24	72	216	82
	273 274 276 277	20	246	172	233	133	116	65	195	19	57	171
		21	230	124	89	267	235	139	134	119	74	222
		22	100	17	51	153	176	245	169	224	106	35
		23	105	32	96	5	15	45	135	122	83	249
		24	181	260	214	76	228	118	71	213	73	219
		25	91	273	253	193	13	39	117	68	204	46
		26	138	131	110	47	141	140	137	128	101	20
		27	60	180	257	205	49	147	158	191·	7	21
		28	63	189	1							
293	2 3 5 7 8	0		2	4	8	16	32	64	128	256	219
	11 12 13 18 19	1	145	290	287	281	269	245	197	101	202	111
	20 23 27 28 29	2	222	151	9	18	36	72	144	288	283	273
	30 32 34 41 42	3	253	213	133	266	239	185	77	154	15	30
	44 45 47 48 50	4	60	120	240	187	81	162	31	62	124	248
	51 52 62 63 66	5	203	113	226	159	25	50	100	200	107	214
	70 72 74 75 76											
	78 79 80 85 86	6	135	270	247	201	109	218	143	286	279	265
	89. 92 93 98 99	7	237	181	69	138	276	259	225	157	21	42
	101 103 105 106 108	8	84	168	43	86	172	51	102	204	115	230
	110 111 112 113 114	9	167	41	82	164	35	70	140	280	267	241
	116 117 118 119 120	10	189	85	170	47	94	188	83	166	39	78
	122 125 127 128 129	11	156	19	38	76	152	11	22	44	88	176
	130 131 134 136 139											
	142 146 147 151 154	12	59	118	236	179	65	130	260	227	161	29
	157 159 162 163 164	13	58	116	232	171	49	98	196	99	198	103
	165 166 168 171 173	14	206	119	238	183	73	146	292 :	291	289	285
	174 175 176 177 179	15	277	261	229	165	37	74	148	3	6	12
	180 181 182 183 185	16	24	48	96	192	91	182	71	142	284	275
	187 188 190 192 194	17	257	221	149	5	10	20	40	80	160	27
	195 200 201 204. 207											
	208 213 214 215 217	18	54	108	216	139	278	263	233	173	53	106
	218 219 221 223 227	19	212	131	262	231	169	45	90	180	67	134
	230 231 241 242 243	20	268	243	193	93	186	79	158	23	46	92
	245 246 248 249 251	21	184	75	150	7	14	28	56	112	224	155
	252 259 261 263 264	22	17	34	68	136	272	251	209	125	250	207
	265 266 270 273 274	23	121	242	191	89	178	63	126	252	211	129
	275 280 281 282 285											
	286 288 290 291	24	258	223	153	13	26	52	104	208	123	246
		25	199	105	210	127	254	215	137	274	255	217
		26	141	282	271	249	205	117	234	175	57	114
		27	228	163	33	66	132	264	235	177	61	122
		28	244	195	97	194	95	190	87	174	55	110
		29	220	147	1							

	Primitive Wurzeln				N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
307	5	13	14	21	0		5	25	125	11	55	275	147	121	298
	22	23	29	30	1	262	82	103	208	119	288	212	139	81	98
	31	43	45	47	2	183	301	277	157	171	241	284	192	39	195
	50	52	55	56	3	54	270	122	303	287	207	114	263	87	128
	59	61	67	73	4	26	130	36	180	286	202	89	138	76	73
	74	75	78	80	5	58	290	222	189	24	120	293	237	264	92
	82	84	85	88											
	92	95	98	106	6	153	151	141	91	148	126	16	80	93	158
	111	116	117	120	7	176	266	102	203	94	163	201	84	113	258
	123	124	126	130	8	62	3	15	75	68	33	165	211	134	56
	131	132	137	138	9	280	172	246	2	10	50	250	22	110	243
	142	143	147	151	10	294	242	289	217	164	206	109	238	269	117
	157	159	161	166	11	278	162	196	59	295	247	7	35	175	261
	172	173	174	178											
	180	185	186	188	12	77	78	83	108	233	244	299	267	107	228
	189	195	197	198	13	219	174	256	52	260	72	53	265	97	178
	200	203	207	208	14	276	152	146	116	273	137	71	48	240	279
	213	217	218	220	15	167	221	184	306	302	282	182	296	252	32
	221	224	236	238	16	160	186	9	45	225	204	99	188	19	95
	241	242	244	245	17	168	226	209	124	6	30	150	136	66	23
	247	249	258	263											
	265	266	267	268	18	115	268	112	253	37	185	4	20	100	193
	270	279	281	282	19	44	220	179	281	177	271	127	21	105	218
	292	296	297	300	20	169	231	234	249	17	85	118	283	187	14
					21	70	43	215	154	156	166	216	159	181	291
					22	227	214	149	131	41	205	104	213	144	106
					23	223	194	49	245	304	292	232	239	274	142
					24	96	173	251	27	135	61	305	297	257	57
					25	285	197	64	13	65	18	90	143	101	198
					26	69	38	190	29	145	111	248	12	60	300
					27	272	132	46	230	229	224	199	74	63	8
					28	40	200	79	88	133	51	255	47	235	254
					29	42	210	129	31	155	161	191	34	170	236
					30	259	67	28	140	86	123	1			
311	17	19	22	23	0		17	289	248	173	142	237	297	73	308
	29	31	33	34	1	260	66	189	103	196	222	42	92	9	153
	37	38	43	44	2	113	55	2	34	267	185	35	284	163	283
	55	57	58	59	3	146	305	209	132	67	206	81	183	84	184
	62	66	69	71	4	18	306	226	110	4	68	223	59	70	257
	74	76	82	85	5	15	255	292	299	107	264	134	101	162	266
	88	92	93	97											
	99	101	102	103	6	168	57	36	301	141	220	8	136	135	118
	110	111	114	115	7	140	203	30	199	273	287	214	217	268	202
	118	119	122	123	8	13	221	25	114	72	291	282	129	16	272

	Primitive Wurzeln				N.	Reste									
						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
311	124	129	131	132	9	270	236	280	95	60	87	235	263	117	123
	133	136	138	145	10	225	93	26	131	50	228	144	271	253	258
	148	149	151	152	11	32	233	229	161	249	190	120	174	159	215
	153	154	155	161											
	164	167	170	172	12	234	246	139	186	52	262	100	145	288	231
	174	176	177	180	13	195	205	64	155	147	11	187	69	240	37
	181	183	184	186	14	7	119	157	181	278	61	104	213	200	290
	191	194	199	202	15	265	151	79	99	128	310:	294	22	63	138
	203	204	205	207	16	169	74	14	238	3	51	245	122	208	115
	211	213	215	217	17	89	269	219	302	158	198	256	309	277	44
	218	221	227	230											
	231	232	233	236	18	126	276	27	148	28	165	6	102	179	244
	238	239	241	244	19	105	230	178	227	127	293	5	85	201	307
	246	247	248	251	20	243	88	252	241	54	296	56	19	12	204
	255	257	258.	263	21	47	177	210	149	45	143	254	275	10	170
	266	269	271	272	22	91	303	175	176	193	171	108	281	112	38
	276	281	283	284	23	24	97	.94	43	109	298	90	286	197	239
	286	290	295	297											
	299	301	302	303	24	20	29	182	295	39	41	75	31	216	251
	306	307	308	309	25	224	76	48	194	188	86	218	285	180	261
					26	83	167	40	58	53	279	78	82	150	62
					27	121	191	137	152	96	77	65	172	125	259
					28	49	211	166	23	80	116	106	247	156	164
					29	300	124	242	71	274	304	192	154	130	33
					30	250	207	98	111	21	46	160	232	212	183
					31	1									
313	10.	14	15	17	0		10	100	61	297	153	278	276	256	56
	20	21	28	31	1	247	279	286	43	117	231	119	251	6	60
	34	37	41	45	2	287	53	217	292	103	91	284	23	230	109
	46	47	55	59	3	151	258	76	134	88	254	36	47	157	5
	60	62	63	65	4	50	187	305	233	139	138	128	28	280	296
	67	69	74	77	5	143	178	215	272	216	282	3	30	300	183
	80	84	86	89											
	90	91	92	94	6	265	146	208	202	142	168	115	211	232	129
	101	102	106	109	7	38	67	44	127	18	180	235	159	25	250
	110	112	120	122	8	309	273	226	69	,64	14	140	148	228	89
	123	126	127	130	9	264	136	108	141	158	15	150	248	289	73
	146	149	153	154	10	104	101	71	84	214	262	116	221	19	190
	159	160	164	167	11	22	220	9	90	274	236	169	125	311	293
	183	186	187	190											
	191	193	201	203	12	113	191	32	7	70	74	114	201	132	68
	204	207	211	212	13	54	227	79	164	75	124	301	193	52	207
	219	221	222	223	14	192	42	107	131	58	267	166	95	11	110
	224	227	229	233	15	161	45	137	118	241	219	312:	303	213	252
	236	239	244	246	16	16	160	35	37	57	257	66	34	27	270
					17	196	82	194	62	307	253	26	260	96	21

	Primitive Wurzeln	N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
313	248 250 251 253	18	210	222	29	290	83	204	162	55	237	179
	254 258 266 267	19	225	59	277	266	156	308	263	126	8	80
	268 272 276 279	20	174	175	185	285	33	17	170	135	98	41
	282 285 292 293	21	97	31	310	283	13	130	48	167	105	111
	296 298 299 303	22	171	145	198	102	81	184	275	246	269	186
		23	295	133	78	154	288	63	4	40	87	244
		24	249	299	173	165	85	224	49	177	205	172
		25	155	298	163	65	24	240	209	212	242	229
		26	99	51	197	92	294	123	291	93	304	223
		27	39	77	144	188	2	20	200	122	281	306
		28	243	239	199	112	181	245	259	86	234	149
		29	238	189	12	120	261	106	121	271	206	182
		30	255	46	147	218	302	203	152	268	176	195
		31	72	94	1							
317	2 3 5 8 12 13	0		2	4	8	16	32	64	128	256	195
	14 17 18 19 20 21	1	73	146	292	267	217	117	234	151	302	287
	22 27 29 30 32 33	2	257	197	77	154	308	299	281	245	173	29
	35 41 45 46 47 48	3	58	116	232	147	294	271	225	133	266	215
	50 52 55 56 62 68	4	113	226	135	270	223	129	258	199	81	162
	69 71. 72 74 75 76	5	7	14	28	56	112	224	131	262	207	97
	78 80 84 86 88 91											
	93 97 98 102 106 107	6	194	71	142	284	251	185	53	106	212	107
	108 109 111 115 116 117	7	214	111	222	127	254	191	65	130	260	203
	118 119 120 122 125 126	8	89	178	39	78	156	312	307	297	277	237
	127 128 129 130 132 133	9	157	314	311	305	293	269	221	125	250	183
	134 137 139 140 143 146	10	49	98	196	75	150	300	283	249	181	45
	147 151 153 154 155 158	11	90	180	43	86	172	27	54	108	216	115
	159 162 163 164 166 170											
	171 174 177 178 180 183	12	230	143	286	255	193	69	138	276	235	153
	184 185 187 188 189 190	13	306	295	273	229	141	282	247	177	37	74
	191 192 195 197 198 199	14	148	296	275	233	149	298	279	241	165	13
	200 201 202 206 208 209	15	26	52	104	208	99	198	79	158	316 :	315
	210 211 215 219 220 224	16	313	309	301	285	253	189	61	122	244	171
	226 229 231 233 237 239	17	25	50	100	200	83	166	15	30	60	120
	241 242 243 245 246. 248											
	249 255 261 262 265 267	18	240	163	9	18	36	72	144	288	259	261
	269 270 271 272 276 282	19	85	170	23	46	92	184	51	102	204	91
	284 285 287 288 290 295	20	183	47	94	188	59	118	236	155	310	303
	296 297 298 299 300 303	21	289	261	205	93	186	55	110	220	123	246
	304 305 309 312 314 315	22	175	33	66	132	264	211	105	210	103	206
		23	95	190	63	126	252	187	57	114	228	139

	Primitive Wurzeln				N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
317					24	278	239	161	5	10	20	40	80	160	3
					25	6	12	24	48	96	192	67	134	268	219
					26	121	242	167	17	34	68	136	272	227	137
					27	274	231	145	290	263	209	101	202	87	174
					28	31	62	124	248	179	41	82	164	11	22
					29	44	88	176	35	70	140	280	243	169	21
					30	42	84	168	19	38	76	152	304	291	265
					31	213	109	218	119	238	159	1			
331	3	11	28	29	0		3	9	27	81	243	67	201	272	154
	35	37.	40	41	1	131	62	186	227	19	57	171	182	215	314
	42	44	50	55	2	280	178	203	278	172	185	224	10	30	90
	59	60	63	66	3	270	148	113	8	24	72	216	317	289	205
	86	90	93	97	4	284	190	239	55	165	164	161	152	125	44
	98	99	101	107	5	132	65	195	254	100	300	238	52	156	137
	129	134	135	136											
	137	140	147	148	6	80	240	58	174	191	242	64	192	245	73
	152	158	160	170	7	219	326	316	286	196	157	109	327	319	295
	175	182	190	192	8	223	7	21	63	189	236	46	138	83	249
	201	204	208	209	9	85	255	103	309	265	133	68	204	281	181
	210	217	218	221	10	212	305	253	97	291	211	302	244	70	210
	222	227	228	237	11	299	235	43	129	56	168	173	188	233	37
	240	244	249	250											
	254	255	260	262	12	111	2	6	18	54	162	155	134	71	213
	273	277	278	285	13	308	262	124	41	123	38	114	11	33	99
	286	288	292	295	14	297	229	25	75	225	13	39	117	20	60
	301	305	306	307	15	180	209	296	226	16	48	144	101	303	247
	310	311	312	314	16	79	237	49	147	110	330 :	328	322	304	250
	317	322	325	326	17	88	264	130	59	177	200	269	145	104	312
					18	274	160	149	116	17	51	153	128	53	159
					19	146	107	321	301	241	61	183	218	323	307
					20	259	115	14	42	126	47	141	92	276	166
					21	167	170	179	206	287	199	266	136	77	231
					22	31	93	279	175	194	251	91	273	157	140
					23	89	267	139	86	258	112	5	15	45	135
					24	74	222	4	12	36	108	324	310	268	142
					25	95	285	193	248	82	246	76	228	22	66
					26	198	263	127	50	150	119	26	78	234	40
					27	120	29	87	261	121	32	96	288	202	275
					28	163	158	143	98	294	220	329	325	313	277
					29	169	176	197	260	118	23	69	207	290	208

	Primitive Wurzeln				N.	Reste									
						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
331					30	293	217	320	298	232	34	102	306	256	106
					31	318	292	214	311	271	151	122	35	105	315
					32	283	187	230	28	84	252	94	282	184	221
					33	1									
337	10.	15	19	20	0		10	100	326	227	248	121	199	305	17
	22	23	29	31	1	170	15	150	152	172	35	13	130	289	194
	33	34	44	45	2	255	191	225	228	258	221	188	195	265	291
	46	51	53	60	3	214	118	169	5	50	163	282	124	229	268
	61	67	68	70	4	321	177	85	176	75	76	86	186	175	65
	71	73	80	83	5	313	97	296	264	281	114	129	279	94	266
	87	89	90	93											
	99	101	106	109	6	301	314	107	59	253	171	25	250	141	62
	114	116	118	120	7	283	134	329	257	211	88	206	38	43	93
	124	130	132	134	8	256	201	325	217	148	132	309	57	233	308
	139	143	151	152	9	47	133	319	157	222	198	295	254	181	125
	154	160	161	166	10	239	31	310	67	333	297	274	44	103	19
	171	176	177	183	11	190	215	128	269	331	277	74	66	323	197
	185	186	194	198											
	203	205	207	213	12	285	154	192	235	328	247	111	99	316	127
	217	219	221	223	13	259	231	288	184	155	202	335	317	137	22
	228	231	236	238	14	220	178	95	276	64	303	334	307	37	33
	244	247	248	250	15	330	267	311	77	96	286	164	292	224	218
	254	257	264	266	16	158	232	298	284	144	92	246	101	336 :	327
	267	269	270	276	17	237	11	110	89	216	138	32	320	167	322
	277	284	286	291											
	292	293	303	304	18	187	185	165	302	324	207	48	143	82	146
	306	308	314	315	19	112	109	79	116	149	142	72	46	123	219
	317	318	322	327	20	168	332	287	174	55	213	108	69	16	160
					21	252	161	262	261	251	151	162	272	24	240
					22	41	73	56	223	208	58	243	71	36	23
					23	230	278	84	166	312	87	196	275	54	203
					24	8	80	126	249	131	299	294	244	81	136
					25	12	120	189	205	28	280	104	29	290	204
					26	18	180	115	139	42	83	156	212	98	306
					27	27	270	4	40	63	293	234	318	147	122
					28	209	68	6	60	263	271	14	140	52	183
					29	145	102	9	90	226	238	21	210	78	106
					30	49	153	182	135	2	20	200	315	117	159
					31	242	61	273	34	3	30	300	304	7	70
					32	26	260	241	51	173	45	113	119	179	105
					33	39	53	193	245	91	236	1			

	Primitive Wurzeln					N.	Reste 0	1	2	2	4	5	6	7	8	9
347	2	5	6	7	8	0		2	4	8	16	32	64	128	256	165
	15	17	18	19	20	1	330	313	279	211	75	150	300	253	159	318
	21	22	23	24	26	2	289	231	115	230	113	226	105	210	73	146
	28	32	37	41	45	3	292	237	127	254	161	322	297	247	147	294
	47	50	51	54	55	4	241	135	270	193	39	78	156	312	277	207
	57	58	60	62	63	5	67	134	268	189	31	62	124	248	149	298
	65	66	68	69	70											
	72	76	77	78	79	6	249	151	302	257	167	334	321	295	243	139
	80	84	86	88	91	7	278	209	71	142	184	221	95	190	33	66
	92	96	97	98	101	8	132	264	181	15	30	60	120	240	133	266
	103	104	106	111	112	9	185	23	46	92	184	21	42	84	168	336
	118	122	123	125.	128	10	325	303	259	171	342	337	327	307	267	187
	134	135	139	141	142	11	27	54	108	216	85	170	340	333	319	291
	145	146	148	150	151											
	153	155	162	163	164	12	235	123	246	145	290	233	119	238	129	258
	165	166	170	171	174	13	169	338	329	311	275	203	59	118	236	125
	175	178	179	180	186	14	250	153	306	265	183	19	38	76	152	304
	187	188	189	190	191	15	261	175	3	6	12	24	48	96	192	37
	193	195	198	200	203	16	74	148	296	245	143	286	225	103	206	65
	204	207	209	210	211	17	130	260	173	346:	345	343	339	331	315	283
	214	215	216	217	218											
	220	221	223	226	227	18	219	91	182	17	34	68	136	272	197	47
	228	230	231	232	233	19	94	188	29	58	116	232	117	234	121	242
	234	237	238	239	240	20	137	274	201	55	110	220	93	186	25	50
	242	245	247	248	252	21	100	200	53	106	212	77	154	308	269	191
	253	254	257	258	260	22	35	70	140	280	213	79	158	316	285	223
	262	264	265	266	272	23	99	198	49	98	196	45	90	180	13	26
	273	274	276	280	283											
	286	288	291	294	295	24	52	104	208	69	138	276	205	63	126	252
	298	299	301	303	304	25	157	314	281	215	83	166	332	317	287	227
	305	307	308	309	311	26	107	214	81	162	324	301	255	163	326	305
	312	313	314	316	317	27	263	179	11	22	44	88	176	5	10	20
	318	320	322	331	333	28	40	80	160	320	293	239	131	262	177	7
	334	335	336	337	338	29	14	28	56	112	224	101	202	57	114	228
	343	344														
						30	109	218	89	178	9	18	36	72	144	288
						31	229	111	222	97	194	41	82	164	328	309
						32	271	195	43	86	172	344	341	335	323	299
						33	251	155	310	273	199	51	102	204	61	122
						34	244	141	282	217	87	174	1			
349	2	7	13	18		0		2	4	8	16	32	64	128	256	163
	30	32	33	34		1	326	303	257	165	330	311	273	197	45	90
	40	43	44	46		2	180	11	22	44	88	176	3	6	12	24
	50	54	55	59		3	48	96	192	35	70	140	280	211	73	146
	62	63	71	72		4	292	235	121	242	135	270	191	33	66	132
	74	82	84	89		5	264	179	9	18	36	72	144	288	227	105

	Primitive Wurzeln					N.	Reste 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
349	90	96	97	99		6	210	71	142	284	219	89	178	7	14	28
	105	107	112	113		7	56	112	224	99	198	47	94	188	27	54
	114	117	119	120		8	108	216	83	166	332	315	281	213	77	154
	128	129	132	134		9	308	267	185	21	42	84	168	336	323	297
	137	138	140	141		10	245	141	282	215	81	162	324	299	249	149
	149	150	152	154		11	298	247	145	290	231	113	226	103	206	63
	156	159	161	165												
	166	172	173	174		12	126	252	155	310	271	193	37	74	148	296
	175	176	177	183		13	243	137	274	199	49	98	196	43	86	172
	184	188	190	193		14	344	339	329	309	269	189	29	58	116	232
	195	197	199	200		15	115	230	111	222	95	190	31	62	124	248
	208	209	211	212		16	147	294	239	129	258	167	334	319	289	229
	215	217	220	221		17	109	218	87	174	348:	347	345	341	333	317
	229	230	232	235												
	236	237	242	244		18	285	221	93	186	23	46	92	184	19	38
	250	252	253	259		19	76	152	214	259	169	338	327	305	261	173
	260	265	267	275		20	346	343	337	325	301	253	157	314	279	209
	277	278	286	287		21	69	138	276	203	57	114	228	107	214	79
	290	294	295	299		22	158	316	283	217	85	170	340	331	313	277
	303	306	307	309		23	205	61	122	244	139	278	207	65	130	260
	315	316	317	319												
	331	336	342	347		24	171	342	335	321	293	237	125	250	151	302
						25	255	161	322	295	241	133	266	183	17	34
						26	68	136	272	195	41	82	164	328	307	265
						27	181	13	26	52	104	208	67	134	268	187
						28	25	50	100	200	51	102	204	59	118	236
						29	123	246	143	286	223	97	194	39	78	156
						30	312	275	201	53	106	212	75	150	300	251
						31	163	306	263	177	5	10	20	40	80	160
						32	320	291	233	117	234	119	238	127	254	159
						33	318	287	225	101	202	55	110	220	91	182
						34	15	30	60	120	240	131	262	175	1	
353	3	5	12	13	14	0		3	9	27	81	243	23	69	207	268
	20	24	26	27	28.	1	98	294	176	175	172	163	136	55	165	142
	31	33	37	40	45	2	73	219	304	206	265	89	267	95	285	149
	48	51	52	53	54	3	94	282	140	67	201	250	44	132	43	129
	55	56	57	62	63	4	34	102	306	212	283	143	76	228	331	287
	66	69	71	74	75.	5	155	112	336	302	200	247	35	105	315	239

4.
Über die geometrische Bedeutung der linearen Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades.

(Vom Herrn *O. Hesse*, Prof. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

1.

Wenn $u = 0$ eine lineäre Gleichung ist, mit einer Variabeln, für welche das geometrische Bild bekanntlich ein Punct auf einer gegebenen geraden Linie ist, so wird dieser Punct zu einem ganz bestimmten Punct, wenn zwischen den noch unbestimmt angenommenen Coëfficienten der Gleichung $u = 0$ eine lineäre homogene Bedingungsgleichung Statt findet. Enthält die lineäre Gleichung $u = 0$ zwei Variabeln, so weifs man, dafs alle durch sie dargestellte gerade Linien durch einen und denselben Punct gehen, wenn zwischen den Coëfficienten in der Gleichung $u = 0$ eine lineäre homogene Bedingungsgleichung Statt findet. Eben so gehen alle Ebenen durch einen und denselben Punct, wenn die Coëfficienten in der Gleichung der Ebene einer homogenen Bedingungsgleichung genügen.

Wenn $u = 0$ die Gleichung einer Curve oder Oberfläche zweiten Grades bedeutet, und man setzt in derselben für die variabeln Coordinaten die Coordinaten eines bestimmten Punets, so erhält man eine lineäre Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung $u = 0$, welche ausdrückt, dafs alle Curven oder Oberflächen $u = 0$, welche der genannten Bedingungsgleichung genügen, durch einen und denselben Punct hindurchgehen. Diese Bedingungsgleichung ist aber nicht allgemein, weil die Coëfficienten in ihr nicht von einander unabhängig sind. Ich werde in Folgendem die geometrische Bedeutung einer allgemeinen lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades entwickeln.

Eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten:

$$u = x^2 + mx + n = 0,$$

deren Wurzeln a, b sein sollen, stellt auf einer gegebenen geraden Linie

zwei Puncte a, b mit den Abscissen a, b dar. Soll dieses Punctenpaar mit einem andern, auf gleiche Weise bezeichneten Punctenpaare α, β derselben geraden Linie *harmonisch* sein, so mufs der Gleichung

$$ab - \tfrac{1}{2}(a+b)(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 0$$

genügt werden; oder, wenn man für $a+b$ und ab ihre Werthe setzt, der Gleichung

$$n + m.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 0.$$

Diese Gleichung ist nun eine allgemeine *lineäre* zwischen den Coëfficienten der Gleichung $u = 0$, wenn man α und β unbestimmt läfst. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

„Alle Gleichungen zweiten Grades mit einer Variabeln, deren Coëffi-„cienten einer gegebenen lineären Bedingungsgleichung genügen, sind „die analytischen Ausdrücke von Punctenpaaren auf einer und der-„selben geraden Linie, welche mit einem gegebenen Punctenpaare „harmonisch sind."

Jede drei solcher Punctenpaare bilden also eine Involution von 6 Puncten.

2.

Um die geometrische Bedeutung einer lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung einer Curve oder Oberfläche zweiter Ordnung zu ermitteln, werde ich mich eines analytischen Satzes bedienen, dessen Beweis ich voranschicke.

Es sei v eine beliebige homogene Function zweiten Grades der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, und dann seien $v_1, v_2, \ldots$ die ersten und $v_{11}, v_{12}, \ldots$ die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function, nach den Variabeln genommen. Unter dieser Voraussetzung ist bekanntlich

$$v_k = v_{1k}x_1 + v_{2k}x_2 + \cdots v_{nk}x_n;$$

woraus ein ganzes System von n Gleichungen hervorgeht, wenn man für k die Zahlen $1, 2, \ldots n$ setzt. Durch Auflösung dieses Systems lineärer Gleichungen nach den Variabeln erhält man Gleichungen von der Form

$$\Delta.x_k = V_{1k}v_1 + V_{2k}v_2 + \cdots V_{nk}v_n,$$

in denen bekanntlich $V_{k\lambda} = V_{\lambda k}$ ist, weil $v_{k\lambda} = v_{\lambda k}$ ist, und Δ die *Determinante* bedeutet, gebildet aus den n^2 zweiten partiellen Differentialquotienten

von v. Zwischen den Coëfficienten in den beiden angegebenen Systemen hat man die Relationen

$$0 = v_{1k}V_{1\lambda}+v_{2k}V_{2\lambda}+\cdots v_{nk}V_{n\lambda},$$
$$\varDelta = v_{1k}V_{1k}+v_{2k}V_{2k}+\cdots v_{nk}V_{nk},$$

welche sich wie folgt wiedergeben lassen:

Der Ausdruck $v_k x_\lambda$ verschwindet, wenn man in seiner Entwickelung $V_{11}, V_{12}, \dots V_{22}, \dots$ statt der Producte $x_1x_1, x_1x_2, \dots x_2x_2, \dots$ *setzt; und der Ausdruck $v_k x_k$ nimmt den Werth $\varDelta$ an.*

Wenn nun w eine andere homogene Function zweiter Ordnung von denselben Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ ist und $w_1, w_2, \dots w_n$ die ersten partiellen Differentialquotienten dieser Function sind, so ergiebt sich aus der eben gemachten Bemerkung folgender Satz:

„Der Ausdruck $v_k w_\lambda - v_\lambda w_k$ verschwindet, wenn man in der Ent-„wickelung desselben $V_{11}, V_{12}, \dots V_{22}, \dots$ statt der Producte x_1x_1, „$x_1x_2, \dots x_2x_2, \dots$ setzt."

3.

Wenn $n=3$ und $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ die Coordinaten eines variabeln Puncts bedeuten, so sind

$$v = 0, \quad w = 0$$

die Gleichungen von irgend zwei Kegelschnitten und

$$v+\lambda w = 0$$

ist die Gleichung jedes beliebigen Kegelschnitts, der durch die 4 Schnittpuncte der beiden ersteren hindurchgeht. Da nun durch 4 Puncte drei verschiedene Linienpaare gelegt werden können, so werden sich drei Werthe von λ angeben lassen, für welche der Ausdruck $v+\lambda w$ in zwei lineäre Factoren zerfällt. In der Voraussetzung, dafs x_1, x_2, x_3 die Werthe der Variabeln bedeuten, für welche jeder der beiden Factoren verschwindet, oder, mit anderen Worten, wenn $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ die Coordinaten der Schnittpuncte des den beiden Factoren entsprechenden Linienpaares sind, hat man die Gleichungen:

$$v_1+\lambda w_1 = 0,$$
$$v_2+\lambda w_2 = 0,$$
$$v_3+\lambda w_3 = 0;$$

aus welchen sich durch Elimination der Variabeln eine Gleichung dritten Grades in λ ergiebt, deren Wurzeln λ', λ'', λ''' die oben bezeichneten Werthe von λ in dem Ausdrucke $v+\lambda w$ sind, für welche derselbe in lineäre Factoren zerfällt. Bezeichnet man die Coordinaten des Schnittpuncts 1 des ersten dem Werthe λ' entsprechenden Linienpaares durch $\frac{x'_1}{x'_3}$, $\frac{x'_2}{x'_3}$, die Coordinaten des Schnittpuncts 2 des zweiten dem Werthe λ'' entsprechenden Linienpaares durch $\frac{x''_1}{x''_3}$, $\frac{x''_2}{x''_3}$ etc.; ferner durch v'_k, w'_k die Ausdrücke, in welche v_k, w_k übergehen, wenn man x'_1, x'_2, x'_3 etc. statt x_1, x_2, x_3 setzt, so hat man folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} v'_1+\lambda' w'_1 = 0, & v''_1+\lambda'' w''_1 = 0, & v'''_1+\lambda''' w'''_1 = 0, \\ v'_2+\lambda' w'_2 = 0, & v''_2+\lambda'' w''_2 = 0, & v'''_2+\lambda''' w'''_2 = 0, \\ v'_3+\lambda' w'_3 = 0, & v''_3+\lambda'' w''_3 = 0, & v'''_3+\lambda''' w'''_3 = 0. \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich leicht folgende beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} x''_1 v'''_1+x''_2 v'''_2+x''_3 v'''_3 = 0, & x''_1 w'''_1+x''_2 w'''_2+x''_3 w'''_3 = 0, \\ x'''_1 v'_1+x'''_2 v'_2+x'''_3 v'_3 = 0, & x'''_1 w'_1+x'''_2 w'_2+x'''_3 w'_3 = 0, \\ x'_1 v''_1+x'_2 v''_2+x'_3 v''_3 = 0, & x'_1 w''_1+x'_2 w''_2+x'_3 w''_3 = 0. \end{array}$$

Denn multiplicirt man das dritte System mit x''_1, x''_2, x''_3 und addirt die Producte, so erhält man

$$x''_1 v'''_1+x''_2 v'''_2+x''_3 v'''_3+\lambda'''(x''_1 w'''_1+x''_2 w'''_2+x''_3 w'''_3) = 0.$$

Eben so erhält man aus dem zweiten Systeme, wenn man mit x'''_1, x'''_2, x'''_3 multiplicirt und addirt:

$$x'''_1 v''_1+x'''_2 v''_2+x'''_3 v''_3+\lambda''(x'''_1 w''_1+x'''_2 w''_2+x'''_3 w''_3) = 0.$$

Zieht man die eine von diesen Gleichungen von der anderen ab und bemerkt, dafs identisch $x''_1 v'''_1+x''_2 v'''_2+x''_3 v'''_3 = x'''_1 v''_1+x'''_2 v''_2+x'''_3 v''_3$ und eben so $x''_1 w'''_1+x''_2 w'''_2+x''_3 w'''_3 = x'''_1 w''_1+x'''_2 w''_2+x'''_3 w''_3$ ist, so erhält man die ersten Gleichungen aus den beiden zuletzt angegebenen Systemen. Diese beiden Gleichungen drücken aus, dafs die Puncte 2 und 3 ***harmonische Pole*** des Kegelschnitts $v=0$ und des Kegelschnitts $w=0$ sind. Die beiden Systeme Gleichungen sagen demnach aus, dafs je zwei von den drei Puncten 1, 2, 3 ***harmonische Pole*** sind; sowohl in Rücksicht auf den Kegelschnitt $v=0$, wie in Rücksicht auf den Kegelschnitt $w=0$.

Wenn je zwei von drei Puncten ***harmonische Pole*** eines gegebenen Kegelschnitts sind, so nennt man die drei Puncte ***ein System harmonischer Pole*** des gegebenen Kegelschnitts. Die obige Untersuchung lehrt also, dafs sich, wenn zwei Kegelschnitte gegeben sind, immer drei Puncte finden lassen, welche ein System harmonischer Pole bilden; sowohl für den einen wie für den andern Kegelschnitt. Und man erhält diese drei Puncte als die Schnittpuncte der drei Linienpaare, welche durch die 4 Schnittpuncte der beiden gegebenen Kegelschnitte hindurchgehen.

Wenn man den Kegelschnitt $v = 0$ als gegeben betrachtet, und läfst den Kegelschnitt $w = 0$ variiren, so erhält man auf die angegebene Art alle möglichen Systeme harmonischer Pole des gegebenen Kegelschnitts.

4.

In dem ersten Systeme von Gleichungen, von welchem wir ausgingen, bedeutete λ eine Wurzel der cubischen Gleichung und $v_1, v_2, \dots w_1, w_2$ waren lineäre Functionen der Coordinaten eines der drei Puncte 1, 2, 3. Eliminirt man nun λ aus je zwei von diesen drei Gleichungen, so erhält man folgende Gleichungen dreier Kegelschnitte:

$$v_2 w_3 - v_3 w_2 = 0, \qquad v_3 w_1 - v_1 w_3 = 0, \qquad v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0,$$

welche durch die drei Puncte 1, 2, 3 hindurchgehen. Es stellt also die Gleichung

$$u = b_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + b_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + b_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) = 0,$$

mit den willkürlichen Constanten b_1, b_2, b_3, jeden beliebigen Kegelschnitt dar, welcher durch die Puncte 1, 2, 3 hindurchgeht. Dieselbe Gleichung wird aber alle möglichen Kegelschnitte darstellen, welche durch irgend ein System harmonischer Pole des Kegelschnitts $v = 0$ hindurchgehen, wenn man nicht allein b_1, b_2, b_3, sondern auch die Coëfficienten in der Function w variiren läfst. Der Ausdruck u hat nun nach dem in (§. 2.) bewiesenen Satze die Eigenschaft, zu verschwinden, wenn man in ihm V_{11}, V_{12} statt $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, ... setzt. Wenn also

$$u = a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts ist, der durch irgend ein System harmonischer Pole des Kegelschnitts $v = 0$ hindurchgeht, so findet immer die Be-

dingungsgleichung

$$a_{11}V_{11}+a_{22}V_{22}+a_{33}V_{33}+2a_{23}V_{23}+2a_{31}V_{31}+2a_{12}V_{12} = 0$$

Statt. Sie ist eine allgemeine lineäre Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten in der Gleichung eines Kegelschnitts $u = 0$. Es läfst sich also sagen:

„*Wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichung eines Kegelschnitts „eine lineäre Bedingungsgleichung Statt findet, so geht der Kegel-„schnitt immer durch ein System harmonischer Pole eines andern „durch die Bedingungsgleichung bestimmten Kegelschnitts hindurch.*"

Es bleibt noch übrig, anzugeben, wie durch die lineäre Bedingungsgleichung die Gleichung $v = 0$ des Kegelschnitts zu bestimmen sei, der ein System harmonischer Pole hat, durch welche der Kegelschnitt $u = 0$ hindurchgeht. Man sieht leicht, wenn man in der Bedingungsgleichung x_1x_1, x_1x_2, x_2x_2, ... statt a_{11}, a_{12}, a_{22}, ... setzt, dafs diese Gleichung in die Gleichung eines Kegelschnitts übergeht, dessen reciproke Polare (in Rücksicht auf $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0$), $u = 0$ zur Gleichung hat.

Als eine unmittelbare Folge aus dem Satze, dafs sich durch zwei Systeme harmonischer Pole eines gegebenen Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt hindurchlegen läfst (S. Bd. 20. S. 292), ergiebt sich folgender Satz:

„*Wenn ein Kegelschnitt durch ein System harmonischer Pole eines „gegebenen Kegelschnittes hindurchgeht, so hat er auf seiner Peri-„pherie unendlich viele Systeme harmonischer Pole des gegebenen „Kegelschnitts.*"

5.

Wenn $n = 4$ ist und $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ die Coordinaten eines variabeln Punctes bedeuten, so sind

$$v = 0, \qquad w = 0$$

die Gleichungen von irgend zwei Oberflächen zweiter Ordnung und

$$v+\lambda w = 0$$

ist die Gleichung jeder beliebigen Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve der genannten beiden Oberflächen hindurchgeht. Unter diesen

Oberflächen giebt es auch *Kegel.* In der Voraussetzung, dafs λ der dem Kegel entsprechende Werth dieser Constante ist und $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ die Coordinaten der Spitze des Kegels bedeuten, hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} v_1+\lambda w_1 &= 0, \\ v_2+\lambda w_2 &= 0, \\ v_3+\lambda w_3 &= 0, \\ v_4+\lambda w_4 &= 0; \end{aligned}$$

aus welchen sich durch Elimination der Variabeln eine Gleichung vierten Grades in λ ergiebt, deren Wurzeln eben den Kegeln entsprechen. Man findet auf diese Weise 4 Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen; und die Spitzen von je zweien dieser Kegel sind *harmonische Pole;* sowohl für die eine Oberfläche, wie für die andere. Der Beweis dieser Behauptung läfst sich leicht auf dem in (§. 3.) angegebenen Wege geben.

Man nennt ein *System harmonischer Pole* einer Oberfläche zweiter Ordnung 4 Puncte, von denen je zwei *harmonische Pole* der Oberfläche sind. Demnach bilden die Spitzen 1, 2, 3, 4 der 4 Kegel ein System harmonischer Pole, sowohl in Rücksicht auf die eine Oberfläche, wie in Rücksicht auf die andere; was schon *Poncelet* bewiesen hat.

Wenn man die Oberfläch $v=0$ als gegeben betrachtet, und man läfst die Oberfläche $w=0$ variiren, so erhält man, indem man immer die Spitzen der 4 Kegel bestimmt, alle möglichen Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche.

6

Wenn man aus je zwei der zuletzt angegebenen Gleichungen λ eliminirt, so erhält man 6 Gleichungen von Oberflächen zweiter Ordnung, von denen jede durch die Spitzen 1, 2, 3, 4 der vier Kegel hindurchgeht. Die aus diesen Gleichungen zusammengesetzte Gleichung

$$\begin{aligned} u = {} & b_{12}(v_1w_2-v_2w_1)+b_{13}(v_1w_3-v_3w_1)+b_{14}(v_1w_4-v_4w_1) \\ & +b_{23}(v_2w_3-v_3w_2)+b_{24}(v_2w_4-v_4w_2)+b_{34}(v_3w_4-v_4w_3) = 0, \end{aligned}$$

mit den willkürlichen Constanten b, stellt also jede beliebige Oberfläche zwei-

ter Ordnung dar, welche durch die genannten 4 Puncte hindurchgeht. Diese Gleichung $u = 0$ wird aber alle möglichen Oberflächen zweiter Ordnung umfassen, welche durch irgend ein System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche $v = 0$ hindurchgehen, wenn man sowohl die Constanten b, als die Coëfficienten in der Function w variiren läfst. Der Ausdruck u verschwindet nun nach (§. 2.), wenn man in ihm V_{11}, V_{12} etc. statt $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, ... setzt. Wenn also

$$u = a_{11} x_1 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{33} x_3 x_3 + a_{44} x_4 x_4 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3$$
$$2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 = 0$$

die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung ist, welche durch irgend ein System harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche $v = 0$ hindurchgeht, so findet immer die Gleichung

$$a_{11} V_{11} + a_{22} V_{22} + a_{33} V_{33} + a_{44} V_{44} + 2a_{12} V_{12} + 2a_{13} V_{13} + 2a_{14} V_{14} + 2a_{23} V_{23}$$
$$+ 2a_{24} V_{24} + 2a_{34} V_{34} = 0$$

Statt. Da dieses eine allgemeine lineäre Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten der Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung $u = 0$ ist, so läfst sich Folgendes sagen:

„Wenn zwischen den Coëfficienten der Gleichung einer Oberfläche „zweiter Ordnung eine lineäre Bedingungsgleichung Statt findet, so „geht die Oberfläche durch ein System harmonischer Pole einer an- „dern durch die Bedingungsgleichung bestimmten Oberfläche zweiter „Ordnung hindurch."

Um die Gleichung der zweiten Oberfläche zu bestimmen, welche ein System harmonischer Pole darbietet, durch welche die Oberfläche $u = 0$ hindurchgeht, setze ich in der Bedingungsgleichung statt a_{11}, a_{12}, ... die Producte $x_1 x_1$, $x_1 x_2$, ..., wodurch dieselbe in die Gleichung einer Oberfläche zweiter Ordnung übergeht, deren reciproke Polare (in Rücksicht auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$) die Gleichung der gesuchten Oberfläche ist.

Mit Hülfe des Satzes: dafs sich zwei Systeme harmonischer Pole einer und derselben Oberfläche zweiter Ordnung als die Schnittpuncte von drei Oberflächen zweiter Ordnung betrachten lassen (S. Bd. 20. S. 296), wird leicht Folgendes bewiesen:

„Wenn eine Oberfläche zweiter Ordnung durch ein System harmo- „nischer Pole einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung hindurch- „geht, so liegen auf ihr unendlich viele Systeme harmonischer Pole „der gegebenen Oberfläche."

Ich will noch bemerken, dafs jeder beliebige Punct der Oberfläche, welche die angegebene Eigenschaft hat, sich als ein Punct aus einem Systeme harmonischer Pole der gegebenen Oberfläche betrachten läfst, welche auf der ersteren Oberfläche liegen.

Königsberg im Januar 1852.

5.

Eine Lösung der *Malfatti*schen Aufgabe.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

Man bezeichne die Seiten des gegebenen Dreiecks durch a, b, c und nenne die halbe Summe derselben s, bestimme dann drei Winkel φ, χ, ψ, deren halbe Summe σ sein mag, durch die Gleichungen

$$a = s\sin^2\varphi; \qquad b = s\sin^2\chi; \qquad c = s\sin^2\psi.$$

Dann finden sich die Entfernungen x, y, z der Berührungspuncte der drei gesuchten Kreise von den ihnen anliegenden Ecken A, B, C des gegebenen Dreiecks durch die Gleichungen

$$x = s\sin^2(\sigma-\varphi); \qquad y = s\sin^2(\sigma-\chi); \qquad z = s\sin^2(s-\psi).$$

Von der Richtigkeit dieser Lösung überzeugt man sich leicht auf folgende Weise. In (Taf. II.) mögen K und L die Mittelpuncte der beiden Kreise sein, welche beide die Seite $BC = a$ des gegebenen Dreiecks in den Puncten H und M berühren, so dafs also $BM = y$ und $CH = z$ ist. Bezeichnet man nun die Winkel A, B, C des Dreiecks, entsprechend, durch α, β, γ, so sind

$$LM = y\tang\tfrac{1}{2}\beta \quad \text{und} \quad KH = z\tang\tfrac{1}{2}\gamma$$

die Halbmesser dieser Kreise. Da nun

$$KL = y\tang\tfrac{1}{2}\beta + z\tang\tfrac{1}{2}\gamma \quad \text{und} \quad HM = a-y-z$$

ist, so ist

$$(y\tang\tfrac{1}{2}\beta + z\tang\tfrac{1}{2}\gamma)^2 = (a-y-z)^2 + (z\tang\tfrac{1}{2}\gamma - y\tang\tfrac{1}{2}\beta)^2$$

oder

$$y + z + 2\sqrt{(yz\tang\tfrac{1}{2}\beta\tang\tfrac{1}{2}\gamma)} = a.$$

Es ist aber

$$\tang\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}\right)} \quad \text{und} \quad \tang\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left(\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right)},$$

also

$$\tang\tfrac{1}{2}\beta\tang\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - \frac{a}{s}.$$

Setzt man folglich

$$1-\frac{a}{s} = \cos^2\varphi, \quad \text{also} \quad a = s\sin^2\varphi,$$

so verwandelt sich die obige Gleichung in

$$y+z+2\sqrt{(yz)}\cos\varphi = s\sin^2\varphi,$$

und solcher Gleichungen erhält man noch zwei, nämlich

$$z+x+2\sqrt{(zx)}\cos\chi = s\sin^2\chi,$$
$$x+y+2\sqrt{(xy)}\cos\varphi = s\sin^2\psi.$$

Die Lösung dieser drei Gleichungen gelingt auf die Weise, dafs man sich in einem Kreise, dessen Durchmesser 1 ist, ein Dreieck mit den Winkeln

$$\sigma-\chi, \qquad \sigma-\psi, \qquad \pi-\varphi$$

vorstellt, dessen Seiten also

$$\sin(\sigma-\chi), \qquad \sin(\sigma-\psi), \qquad \sin\varphi$$

sind. Dieses Dreieck giebt die identische Gleichung

$$\sin^2(\sigma-\chi)+\sin^2(\sigma-\psi)+2\sin(\sigma-\chi)\sin(\sigma-\psi)\cos\varphi = \sin^2\varphi.$$

Solcher Gleichungen erhält man noch zwei für $\sin^2\chi$ und $\sin^2\psi$, und die drei Gleichungen führen unmittelbar zu der gegebenen Lösung der Aufgabe.

Die *Construction* der Berührungspuncte der gesuchten Kreise mit den Seiten des Dreiecks ist hiernach so auszuführen, dafs man über $CF = s$ einen Halbkreis beschreibt, auf der Seite $BC = a$ die Seiten $c = CD$ und $b = CE$ abträgt und in der Peripherie des Halbkreises die Puncte D', E', B' senkrecht über D, E, B bestimmt, wodurch man die Bogen

$$CB' = 2\varphi, \qquad CE' = 2\chi, \qquad CD' = 2\psi$$

erhält. Macht man dann $B'G = D'E'$ und halbirt den Bogen CG in H', so trifft das Loth $H'H$ den Berührungspunct H des Kreises K und der Seite BC. Eben so leicht ergeben sich mit Hülfe der Puncte D', E', B' die Gröfsen von x und y.

Berlin im September 1852.

6.

Über die Eigenschaften der linearen Substitutionen, durch welche eine homogene ganze Function zweiten Grades, welche nur die Quadrate von vier Variabeln enthält, in eine Function von derselben Form transformirt wird.

(Von dem Herrn *O. Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg in Pr.)

Wir wollen annehmen, die Coëfficienten a in den linearen Substitutionen

$$(1.)\quad \begin{cases} y_1 = a'_1 x_1 + a''_1 x_2 + a_1^{(3)} x_3 + a_1^{(4)} x_4, \\ y_2 = a'_2 x_1 + a''_2 x_2 + a_2^{(3)} x_3 + a_2^{(4)} x_4, \\ y_3 = a'_3 x_1 + a''_3 x_2 + a_3^{(3)} x_3 + a_3^{(4)} x_4, \\ y_4 = a'_4 x_1 + a''_4 x_2 + a_4^{(3)} x_3 + a_4^{(4)} x_4 \end{cases}$$

seien so bestimmt, dafs

$$(2.)\quad b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 \text{ ist.}$$

Differentiirt man dieser Annahme gemäfs die letzte Gleichung nach einander nach den unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4, indem man die Gröfsen y als Functionen von den Variabeln x betrachtet, wie sie durch die Substitutionen gegeben sind, so erhält man:

$$(3.)\quad \begin{cases} a_1 x_1 = a'_1 b_1 y_1 + a'_2 b_2 y_2 + a'_3 b_3 y_3 + a'_4 b_4 y_4, \\ a_2 x_2 = a''_1 b_1 y_1 + a''_2 b_2 y_2 + a''_3 b_3 y_3 + a''_4 b_4 y_4, \\ a_3 x_3 = a_1^{(3)} b_1 y_1 + a_2^{(3)} b_2 y_2 + a_3^{(3)} b_3 y_3 + a_4^{(3)} b_4 y_4, \\ a_4 x_4 = a_1^{(4)} b_1 y_1 + a_2^{(4)} b_2 y_2 + a_3^{(4)} b_3 y_3 + a_4^{(4)} b_4 y_4. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind als die Auflösungen der Gleichung (1.) nach den Variabeln x zu betrachten und können als solche die Stelle der Gleichungen (1.) vertreten. Wenn man nun $a_1 x_1 = Y_1$, $a_2 x_2 = Y_2$, $a_3 x_3 = Y_3$, $a_4 x_4 = Y_4$; $b_1 y_1 = X_1$, $b_2 y_2 = X_2$, $b_3 y_3 = X_3$, $b_4 y_4 = X_4$ setzt, so gehen diese Gleichungen in die Substitutionen

$$(4.)\quad \begin{cases} Y_1 = a'_1 X_1 + a'_2 X_2 + a'_3 X_3 + a'_4 X_4, \\ Y_2 = a''_1 X_1 + a''_2 X_2 + a''_3 X_3 + a''_4 X_4, \\ Y_3 = a_1^{(3)} X_1 + a_2^{(3)} X_2 + a_3^{(3)} X_3 + a_4^{(3)} X_4, \\ Y_4 = a_1^{(4)} X_1 + a_2^{(4)} X_2 + a_3^{(4)} X_3 + a_4^{(4)} X_4 \end{cases}$$

über, in welchen die horizontalen Reihen der Coëfficienten den entsprechenden verticalen Reihen der Coëfficienten in (1.) gleich sind. Die Gleichung (2.) geht über in:

$$(5.)\quad \frac{1}{a_1}Y_1^2+\frac{1}{a_2}Y_2^2+\frac{1}{a_3}Y_3^2+\frac{1}{a_4}Y_4^2 = \frac{1}{b_1}X_1^2+\frac{1}{b_2}X_2^2+\frac{1}{b_3}X_3^2+\frac{1}{b_4}X_4^2.$$

Hierdurch ist, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4 durch k bezeichnet, folgender Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 1.

Wenn die Substitutionen $y_k = a'_k x_1 + a''_k x_2 + a_k^{(3)} x_3 + a_k^{(4)} x_4$ *den Ausdruck* $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ *in* $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$ *verwandeln, so transformiren die Substitutionen* $Y_k = a_1^{(k)} X_1 + a_2^{(k)} X_2 + a_3^{(k)} X_3 + a_4^{(k)} X_4$ *den Ausdruck*

$$\frac{1}{a_1}Y_1^2+\frac{1}{a_2}Y_2^2+\frac{1}{a_3}Y_3^2+\frac{1}{a_4}Y_4^2 \text{ in } \frac{1}{b_1}X_1^2+\frac{1}{b_2}X_2^2+\frac{1}{b_3}X_3^2+\frac{1}{b_4}X_4^2.$$

Ich führe diesen auf der Hand liegenden Satz, der auch für eine beliebige Zahl von Variabeln gilt, an, um nun aus ihm neue Sätze abzuleiten, welche *nur* bei vier Variabeln Statt finden.

Da die horizontalen Reihen der Coëfficienten in den Gleichungen (4.) den entsprechenden variabeln Reihen in den Gleichungen (1.) gleich sind, so wird auch bei den Auflösungen der beiden Systeme Gleichungen das Nemliche Statt finden. Es ergeben sich daher folgende Auflösungen der Gleichungen (4.):

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{1}{b_1}X_1 = a'_1\frac{1}{a_1}Y_1 + a''_1\frac{1}{a_2}Y_2 + a_1^{(3)}\frac{1}{a_3}Y_3 + a_1^{(4)}\frac{1}{a_4}Y_4, \\ \frac{1}{b_2}X_2 = a'_2\frac{1}{a_1}Y_1 + a''_2\frac{1}{a_2}Y_2 + a_2^{(3)}\frac{1}{a_3}Y_3 + a_2^{(4)}\frac{1}{a_4}Y_4, \\ \frac{1}{b_3}X_3 = a'_3\frac{1}{a_1}Y_1 + a''_3\frac{1}{a_2}Y_2 + a_3^{(3)}\frac{1}{a_3}Y_3 + a_3^{(4)}\frac{1}{a_4}Y_4, \\ \frac{1}{b_4}X_4 = a'_4\frac{1}{a_1}Y_1 + a''_4\frac{1}{a_2}Y_2 + a_4^{(3)}\frac{1}{a_3}Y_3 + a_4^{(4)}\frac{1}{a_4}Y_4; \end{cases}$$

welche Gleichungen man auch aus (5.) durch Differentiation, eben so wie die Gleichungen (3.) und (2.), ableiten kann. Setzt man die Werthe von y_1, y_2, ... aus (1.) in (3.), so ergeben sich, durch Gleichstellung der Coëfficienten gleicher Variabeln auf beiden Seiten der Gleichungen, folgende Ausdrücke:

$$(7.)\quad \begin{cases} a_k = b_1 a_1^k a_1^k + b_2 a_2^k a_2^k + b_3 a_3^k a_3^k + b_4 a_4^k a_4^k, \\ 0 = b_1 a_1^k a_1^\lambda + b_2 a_2^k a_2^\lambda + b_3 a_3^k a_3^\lambda + b_4 a_4^k a_4^\lambda, \end{cases}$$

und auf gleiche Weise aus (4. und 6.)

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{b_k} = \dfrac{1}{a_1}a'_k a'_k + \dfrac{1}{a_2}a''_k a''_k + \dfrac{1}{a_3}a_k^{(3)}a_k^{(3)} + \dfrac{1}{a_4}a_k^{(4)}a_k^{(4)}, \\ 0 = \dfrac{1}{a_1}a'_k a'_\lambda + \dfrac{1}{a_2}a''_k a''_\lambda + \dfrac{1}{a_3}a_k^{(3)}a_\lambda^{(3)} + \dfrac{1}{a_4}a_k^{(4)}a_\lambda^{(4)}. \end{cases}$$

Wir wollen nun untersuchen, was die Substitutionen

$$(9.)\quad y_k = \frac{1}{a'_k}x_1 + \frac{1}{a''_k}x_2 + \frac{1}{a_k^{(3)}}x_3 + \frac{1}{a_k^{(4)}}x_4,$$

$$(10.)\quad Y_k = \frac{1}{a_1^{(k)}}X_1 + \frac{1}{a_2^{(k)}}X_2 + \frac{1}{a_3^{(k)}}X_3 + \frac{1}{a_4^{(k)}}X_4$$

geben.

Zu diesem Ende werde bemerkt, dafs von den Bedingungsgleichungen $0 = b_1 a_1^k a_1^\lambda + b_2 a_2^k a_2^\lambda + b_3 a_3^k a_3^\lambda + b_4 a_4^k a_4^\lambda$, welche erfüllt werden müssen, wenn in dem durch die Substitutionen (1.) zu transformirenden Ausdrucke $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ die Producte der Variabeln x_1, x_2, ... verschwinden sollen, die eine in die andere übergeht, wenn man $\frac{1}{a_\mu^k}$ und $\frac{1}{a_\mu^\lambda}$ statt a_μ^k und a_μ^λ und zugleich $b_k a'_k a''_k a_k^{(3)} a_k^{(4)}$ statt b_k setzt. Von den Bedingungsgleichungen $0 = \frac{1}{a_1}a'_k a'_\lambda + \frac{1}{a_2}a''_k a''_\lambda + \frac{1}{a_3}a_k^{(3)}a_\lambda^{(3)} + \frac{1}{a_4}a_k^{(4)}a_\lambda^{(4)}$, welche erfüllt werden müssen, wenn in dem durch (4.) zu transformirenden Ausdrucke $\frac{1}{a_1}Y_1^2 + \frac{1}{a_2}Y_2^2 + \frac{1}{a_3}Y_3^2 + \frac{1}{a_4}Y_4^2$ die Producte der Variabeln X_1, X_2, .., wegfallen, geht ferner die eine in die andere über, wenn man $\frac{1}{a_\mu^k}$ und $\frac{1}{a_\mu^\lambda}$ statt a_μ^k und a_μ^λ und zugleich $\frac{1}{a_k}a_1^k a_2^k a_3^k a_4^k$ statt $\frac{1}{a^k}$ setzt.

Hieraus folgt, wenn man der Kürze wegen

$$(11.)\quad a'_k a''_k a_k^{(3)} a_k^{(4)} = A_k, \qquad a_1^k a_2^k a_3^k a_4^k = A^k$$

setzt, dafs durch die Substitutionen (9. und 10.) die Ausdrücke

$$(12.)\quad b_1 A_1 y_1^2 + b_2 a_2 y_2^2 + b_3 a_3 y_3^2 + b_4 a_4 y_4^2,$$

$$(13.)\quad \frac{A'}{a_1}Y_1^2 + \frac{A''}{a_2}Y_2^2 + \frac{A^3}{a_3}Y_3^2 + \frac{A^4}{a_4}Y_4^2$$

in solche transformirt werden, die nur die Quadrate der neuen Variabeln enthalten.

Nimmt man an, der Ausdruck (12.) gehe durch die Substitutionen (9.) in folgenden

$$(14.)\quad c_1 A_1 x_1^2 + c_2 A_2 x_2^2 + c_3 A_3 x_3^2 + c_4 A_4 x_4^2$$

über, so mufs nach dem aufgestellten *Lehrsatze* der Ausdruck

$$(15.)\quad \frac{1}{c_1 A_1} Y_1^2 + \frac{1}{c_2 A_2} Y_2^2 + \frac{1}{c_3 A_3} Y_3^2 + \frac{1}{c_4 A_4} Y_4^2$$

durch die Substitutionen (10.) in

$$(16.)\quad \frac{1}{b_1 A_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2 A_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3 A_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4 A_4} X_4^2$$

übergeben.

Wir haben nun zwei verschiedene Functionen der Variabeln Y_1, Y_2, ..., welche nur die Quadrate der Variabeln enthalten, nämlich (13. und 15.), welche beide durch die Substitutionen (16.) in solche Functionen der Variabeln X_1, X_2, ... übergeben, die nur die Quadrate dieser letzteren Variabeln enthalten. Die Zahl der Bedingungsgleichungen, welche zu erfüllen sind, wenn dieses zutreffen soll, ist für jede dieser Functionen *sechs*. Nimmt man nun die Coëfficienten in den Substitutionen als gegeben an, betrachtet dagegen die 4 Coëfficienten in den Functionen (13. und 15.) in den erwähnten Bedingungsgleichungen als die gesuchten Gröfsen, so hat man dieselben linearen Gleichungen zur Bestimmung der Werthe der 4 Coëfficienten für die eine, wie für die andere Function. Hieraus ist ersichtlich, dafs die entsprechenden Coëfficienten in den beiden Functionen nur durch einen Factor M von einander verschieden sein können. Es ist daher

$$c_1 A_1 = M\cdot\frac{a_1}{A'},\qquad c_2 A_2 = M\cdot\frac{a_2}{A''},\qquad c_3 A_3 = M\cdot\frac{a_3}{A^{(3)}},\qquad c_4 A_4 = M\cdot\frac{a_4}{A^{(4)}}.$$

Setzt man diese Werthe von $c_1 A_1$, $c_2 A_2$, ... in (14.), so erhält man den Ausdruck

$$(17.)\quad M\left(\frac{a_1}{A'} x_1^2 + \frac{a_2}{A''} x_2^2 + \frac{a_3}{A^{(3)}} x_3^2 + \frac{a_4}{A^{(4)}} x_4^2\right),$$

in welchen der Ausdruck (12.) durch die Substitutionen (9.) übergeht.

Der Ausdruck (13.) geht demnach, mit Rücksicht auf den oben angegebenen Lehrsatz, durch die Substitutionen (10.) in

$$(18.)\quad M\left(\frac{1}{b_1 A_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2 A_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3 A_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4 A_4} X_4^2\right)$$

über. Diese Bemerkungen vereinigen sich in dem folgenden Lehrsatze.

Lehrsatz 2.

Wenn die Substitutionen $y_k = a'_k x_1 + a''_k x_2 + a^{(3)}_k x_3 + a^{(4)}_k x_4$ *den Ausdruck* $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ *in* $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$ *verwandeln,*



so transformiren die Substitutionen

$$y_k = \frac{1}{a'_k} x_1 + \frac{1}{a''_k} x_2 + \frac{1}{a^{(3)}_k} x_3 + \frac{1}{a^{(4)}_k} x_4$$

den Ausdruck $b_1 A_1 y_1^2 + b_2 A_2 y_2^2 + b_3 A_3 y_3^2 + b_4 A_4 y_4^2$ *in*

$$M\left(\frac{a_1}{A'} x_1^2 + \frac{a_2}{A''} x_2^2 + \frac{a_3}{A^{(3)}} x_3^2 + \frac{a_4}{A^{(4)}} x_4^2\right),$$

und die Substitutionen $Y_k = \frac{1}{a_1^k} X_1 + \frac{1}{a_2^k} X_2 + \frac{1}{a_3^k} X_3 + \frac{1}{a_4^k} X_4$ *transformiren den Ausdruck* $\frac{A'}{a_1} Y_1^2 + \frac{A''}{a_2} Y_2^2 + \frac{A^{(3)}}{a_3} Y_3^2 + \frac{A^{(4)}}{a_4} Y_4^2$ *in*

$$M\left(\frac{1}{b_1 A_1} X_1^2 + \frac{1}{b_2 A_2} X_2^2 + \frac{1}{b_3 A_3} X_3^2 + \frac{1}{b_4 A_4} X_4^2\right).$$

Ich füge noch hinzu, dafs die Werthe der Gröfsen A in (11.) gegeben sind und dafs der Factor M durch die Gleichung

$$(19.)\qquad M\frac{a_k}{A^k} = \frac{b_1 A_1}{a_1^k a_1^k} + \frac{b_2 A_2}{a_2^k a_2^k} + \frac{b_3 A_3}{a_3^k a_3^k} + \frac{b_4 A_4}{a_4^k a_4^k}$$

bestimmt wird, welche man durch Vergleichung von (12. und 17.) erhält. Andere merkwürdige Relationen, die sich aus dem angeführten Lehrsatze ohne Schwierigkeit ableiten lassen, übergehe ich, weil sie Formeln geben würden, die in der folgenden Untersuchung keine Anwendung finden.

Es sei

$$(20.)\qquad F = b_{12} y_1 y_2 + b_{13} y_1 y_3 + b_{14} y_1 y_4 + b_{23} y_2 y_3 + b_{24} y_2 y_4 + b_{34} y_3 y_4$$

eine homogene Function zweiten Grades, in welcher die Quadrate der Variabeln fehlen, und welche die Eigenschaft hat, dafs sie durch die Substitutionen (1.), vermöge welcher die identische Gleichung (2.) Statt findet, in eine Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ von derselben Form übergeht, nämlich in

$$(21.)\qquad F = a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 + a_{34} x_3 x_4.$$

In dieser Voraussetzung hat man

$$(22.)\quad \begin{cases} 0 = b_{12} a_1^k a_2^k + b_{13} a_1^k a_3^k + b_{14} a_1^k a_4^k + b_{23} a_2^k a_3^k + b_{24} a_2^k a_4^k + b_{34} a_3^k a_4^k, \\ a_{k\lambda} = b_{12}(a_1^k a_2^\lambda + a_1^\lambda a_2^k) + b_{13}(a_1^k a_3^\lambda + a_1^\lambda a_3^k) + b_{14}(a_1^k a_4^\lambda + a_1^\lambda a_4^k) \\ \qquad + b_{23}(a_2^k a_3^\lambda + a_2^\lambda a_3^k) + b_{24}(a_2^k a_4^\lambda + a_2^\lambda a_4^k) + b_{34}(a_3^k a_4^\lambda + a_3^\lambda a_4^k), \end{cases}$$

$$(23.)\quad \begin{cases} 0 = \frac{a_{12}}{a_1 a_2} a'_k a''_k + \frac{a_{13}}{a_1 a_3} a'_k a^3_k + \frac{a_{14}}{a_1 a_4} a'_k a^4_k + \frac{a_{23}}{a_2 a_3} a''_k a^3_k + \frac{a_{24}}{a_2 a_4} a''_k a^4_k + \frac{a_{34}}{a_3 a_4} a^3_k a^4_k, \\ b_{k\lambda} = \frac{a_{12}}{a_1 a_2}(a'_k a''_\lambda + a''_k a'_\lambda) + \frac{a_{13}}{a_1 a_3}(a'_k a^3_\lambda + a^3_k a'_\lambda) + \frac{a_{14}}{a_1 a_4}(a'_k a^4_\lambda + a^4_k a'_\lambda) \\ \qquad + \frac{a_{23}}{a_2 a_3}(a''_k a^3_\lambda + a^3_k a''_\lambda) + \frac{a_{24}}{a_2 a_4}(a''_k a^4_\lambda + a^4_k a''_\lambda) + \frac{a_{34}}{a_3 a_4}(a^3_k a^4_\lambda + a^4_k a^3_\lambda). \end{cases}$$

Dividirt man die Function F durch das Product $y_1 y_2 y_3 y_4$ und setzt hierauf y_1, y_2, y_3, y_4 statt $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}$, so erhält man die neue Function

$$(24.)\quad \Phi = b_{34} y_1 y_2 + b_{24} y_1 y_3 + b_{23} y_1 y_4 + b_{14} y_2 y_3 + b_{13} y_2 y_4 + b_{12} y_3 y_4.$$

Wir wollen nun untersuchen, in welche Function diese Function übergeht, wenn man in derselben die Substitutionen (9.) macht.

Es ist leicht zu sehen, dafs in der durch (9.) transformirten Function Φ die Quadrate der Variabeln $x_1, x_2, \dots$ vermöge der Gleichungen (21.) wegfallen. Die transformirte Function Φ hat mithin die nemliche Form wie die Function Φ selber, nämlich:

$$(25.)\quad \Phi = A_{34} x_1 x_2 + A_{24} x_1 x_3 + A_{23} x_1 x_4 + A_{14} x_2 x_3 + A_{13} x_2 x_4 + A_{12} x_3 x_4,$$

und die Coëfficienten A erhalten die Werthe

$$(26.)\quad \begin{cases} A_{12} = b_{34}\left(\frac{1}{a_1^3 a_2^4} + \frac{1}{a_1^4 a_2^3}\right) + b_{24}\left(\frac{1}{a_1^3 a_3^4} + \frac{1}{a_1^4 a_3^3}\right) + b_{23}\left(\frac{1}{a_1^3 a_4^4} + \frac{1}{a_1^4 a_4^3}\right) \\ \qquad + b_{14}\left(\frac{1}{a_2^3 a_3^4} + \frac{1}{a_2^4 a_3^3}\right) + b_{13}\left(\frac{1}{a_2^3 a_4^4} + \frac{1}{a_2^4 a_4^3}\right) + b_{12}\left(\frac{1}{a_3^3 a_4^4} + \frac{1}{a_3^4 a_4^3}\right), \\ A_{13} = b_{34}\left(\frac{1}{a_1'' a_2^4} + \frac{1}{a_1^4 a_2''}\right) + b_{24}\left(\frac{1}{a_1'' a_3^4} + \frac{1}{a_1^4 a_3''}\right) + \cdots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Diese Coëfficienten A lassen sich durch die Coëfficienten a der transformirten Function F sehr einfach ausdrücken. Um dazu zu gelangen, dienen folgende Betrachtungen.

Die in (20.) angegebene Function F, welche durch die Substitutionen (1.) in die in (21.) angegebene Function übergeht, läfst sich als eine Function der Variabeln $y_1, y_2, \dots$ oder als eine Function der Variabeln $x_1, x_2, \dots$, betrachten, indem die ersteren Variabeln als Functionen der zweiten durch die Substitutionen (1.) gegeben sind, oder die zweiten Variabeln als Functionen der ersteren durch die Gleichungen (3.). Differentiirt man die Function F unter der letzteren Annahme nach den unabhängigen Variabeln $y_1, y_2, \dots$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_1}\frac{\partial F}{\partial y_1} &= \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_1' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_1'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_1^3 + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_1^4, \\ \frac{1}{b_2}\frac{\partial F}{\partial y_2} &= \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_2' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_2'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_2^3 + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_2^4, \\ \frac{1}{b_3}\frac{\partial F}{\partial y_3} &= \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_3' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_3'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_3^3 + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_3^4, \\ \frac{1}{b_4}\frac{\partial F}{\partial y_4} &= \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot a_4' + \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\cdot a_4'' + \frac{1}{a_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot a_4^3 + \frac{1}{a_4}\frac{\partial F}{\partial x_4}\cdot a_4^4, \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für die partiellen Differentialquotienten ihre Werthe, und $y_1 = a_1^4$, $y_2 = a_2^4$, $y_3 = a_3^4$, $y_4 = a_4^4$, zugleich mit den entsprechenden Werthen der Variabeln, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$, so erhält man

$$\frac{1}{b_1}(b_{12}a_2^4 + b_{13}a_3^4 + b_{14}a_4^4) = \frac{a_{41}a_1'}{a_1} + \frac{a_{42}a_1''}{a_2} + \frac{a_{43}a_1^3}{a_3},$$
$$\frac{1}{b_2}(b_{21}a_1^4 + b_{23}a_3^4 + b_{24}a_4^4) = \frac{a_{41}a_2'}{a_1} + \frac{a_{42}a_2''}{a_2} + \frac{a_{43}a_2^3}{a_3},$$
$$\frac{1}{b_3}(b_{31}a_1^4 + b_{33}a_2^4 + b_{34}a_4^4) = \frac{a_{41}a_3'}{a_1} + \frac{a_{42}a_3''}{a_2} + \frac{a_{43}a_3^3}{a_3},$$
$$\frac{1}{b_4}(b_{41}a_1^4 + b_{42}a_2^4 + b_{43}a_3^4) = \frac{a_{41}a_4'}{a_1} + \frac{a_{42}a_4''}{a_2} + \frac{a_{43}a_4^3}{a_3}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4, so lassen sich die Theile derselben links durch Hülfe der Gleichungen (22.) und die Theile rechts mit Hülfe der Gleichungen (23.) auf die Weise umformen, dafs

$$\frac{1}{b_1}(b_{34}a_3^4a_4^4 + b_{24}a_2^4a_4^4 + b_{23}a_2^4a_3^4) = a_4\left(\frac{a_{12}a_1'a_1''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_1'a_1^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_1''a_1^3}{a_2a_3}\right),$$
$$\frac{1}{b_2}(b_{43}a_3^4a_4^4 + b_{14}a_1^4a_4^4 + b_{13}a_1^4a_3^4) = a_4\left(\frac{a_{12}a_2'a_2''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_2'a_2^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_2''a_2^3}{a_2a_3}\right),$$
$$\frac{1}{b_3}(b_{24}a_2^4a_4^4 + b_{14}a_1^4a_4^4 + b_{12}a_1^4a_2^4) = a_4\left(\frac{a_{12}a_3'a_3''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_3'a_3^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_3''a_3^3}{a_2a_3}\right),$$
$$\frac{1}{b_4}(b_{23}a_2^4a_3^4 + b_{13}a_1^4a_3^4 + b_{12}a_1^4a_2^4) = a_4\left(\frac{a_{12}a_4'a_4''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_4'a_4^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_4''a_4^3}{a_2a_3}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{b_1}{a_2^4a_3^4a_4^4} = \frac{b_1a_1^4}{A^4},\quad \frac{b_2}{a_1^4a_3^4a_4^4} = \frac{b_2a_2^4}{A^4},\quad \frac{b_3}{a_1^4a_2^4a_4^4} = \frac{b_3a_3^4}{A^4},\quad \frac{b_4}{a_1^4a_2^4a_3^4} = \frac{b_4a_4^4}{A^4},$$

so erhält man

$$b_{34}\frac{1}{a_2^4} + b_{24}\frac{1}{a_3^4} + b_{23}\frac{1}{a_4^4} = \frac{b_1a_4a_1^4}{A^4}\left(\frac{a_{12}a_1'a_1''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_1'a_1^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_1''a_1^3}{a_2a_3}\right),$$
$$b_{34}\frac{1}{a_1^4} + b_{14}\frac{1}{a_3^4} + b_{13}\frac{1}{a_4^4} = \frac{b_2a_4a_2^4}{A^4}\left(\frac{a_{12}a_2'a_2''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_2'a_2^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_2''a_2^3}{a_2a_3}\right),$$
$$b_{23}\frac{1}{a_1^4} + b_{14}\frac{1}{a_2^4} + b_{12}\frac{1}{a_4^4} = \frac{b_3a_4a_3^4}{A^4}\left(\frac{a_{12}a_3'a_3''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_3'a_3^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_3''a_3^3}{a_2a_3}\right),$$
$$b_{23}\frac{1}{a_1^4} + b_{13}\frac{1}{a_2^4} + b_{12}\frac{1}{a_3^4} = \frac{b_4a_4a_4^4}{A^4}\left(\frac{a_{12}a_4'a_4''}{a_1a_2} + \frac{a_{13}a_4'a_4^3}{a_1a_3} + \frac{a_{23}a_4''a_4^3}{a_2a_3}\right).$$

Multiplicirt man endlich diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{1}{a_1^3}$, $\frac{1}{a_2^3}$, $\frac{1}{a_3^3}$, $\frac{1}{a_4^3}$ und addirt die Producte, so giebt die Summe der Glieder links gerade

den Ausdruck, welcher vorhin mit A_{12} bezeichnet wurde, während rechts die mit a_{13} und a_{23} multiplicirten Glieder wegen der Gleichungen (7.) wegfallen, so dafs sich

$$A_{12} = \frac{a_{12} \cdot a_4}{a_1 a_2 A^4} \left\{ \frac{b_1 A_1}{a_1^1 a_1^2} + \frac{b_2 A_2}{a_2^1 a_2^2} + \frac{b_3 A_3}{a_3^1 a_3^2} + \frac{b_4 A_4}{a_4^1 a_4^2} \right\}$$

und nach (19.)

$$(27.)\quad \begin{cases} A_{12} = a_{12} \cdot \frac{a_3 a_3}{A^3} \cdot \frac{a_4 a_4}{A^4} \cdot \frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4} \text{ und eben so} \\ A_{13} = a_{13} \cdot \frac{a_2 a_2}{A''} \cdot \frac{a_4 a_4}{A^4} \cdot \frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

findet. Hierdurch ist folgender Lehrsatz bewiesen.

Lehrsatz 3.

Wenn die Substitutionen $y_k = a'_k x_1 + a''_k x_2 + a^3_k x_3 + a^4_k x_4$ *den Ausdruck* $b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 + b_4 y_4^2$ *in* $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$ *und überdies dieselben Substitutionen den Ausdruck* $b_{12} y_1 y_2 + b_{13} y_1 y_3 + b_{14} y_1 y_4$ $b_{23} y_2 y_3 + b_{24} y_2 y_4 + b_{34} y_3 y_4$ *in* $a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3$ $+ a_{24} x_2 x_4 + a_{34} x_3 x_4$ *verwandeln, so transformiren die Substitutionen* $y_k = \frac{1}{a'_k} x_1 + \frac{1}{a''_k} x_2 + \frac{1}{a^3_k} x_3 + \frac{1}{a^4_k} x_4$ *den Ausdruck* $b_{34} y_1 y_2 + b_{24} y_1 y_3 + b_{23} y_1 y_4$ $b_{14} y_2 y_3 + b_{13} y_2 y_4 + b_{12} y_3 y_4$ *in*

$$\frac{M}{a_1 a_2 a_3 a_4} \{ a_{34} z_1 z_2 + a_{24} z_1 z_3 + a_{23} z_2 z_3 + a_{14} z_2 z_3 + a_{13} z_2 z_4 + a_{12} z_3 z_4 \},$$

wo $z_1 = \frac{a_1 a_1 x_1}{A'}$, $z_2 = \frac{a_2 a_2 x_2}{A''}$, $z_3 = \frac{a_3 a_3 x_3}{A^3}$, $z_4 = \frac{a_4 a_4 x_4}{A^4}$ *und* $A^k = a_1^k a_2^k a_3^k a_4^k$ ist.

Die beiden ersten Lehrsätze lassen sich geometrisch wie folgt deuten:

Es seien 8 Puncte im Raume gegeben, in welchen sich drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden. Betrachtet man irgend 4 von diesen Puncten als die Ecken eines Tetraëders und fället von den 4 andern Puncten Perpendikel auf die Oberflächen des Tetraëders, so mögen sich dieselben verhalten:

wie $a'_1 : a'_2 : a'_3 : a'_4$ für den ersten Punct,
wie $a''_1 : a''_2 : a''_3 : a''_4$ für den zweiten Punct,
wie $a^3_1 : a^3_2 : a^3_3 : a^3_4$ für den dritten Punct,
wie $a^4_1 : a^4_2 : a^4_3 : a^4_4$ für den vierten Punct.

Bestimmt man dann 4 neue Puncte, deren senkrechte Abstände von den Seitenflächen des Tetraëders sich

wie $a'_1 : a''_1 : a^3_1 : a^4_1$ für den ersten Punct,
wie $a'_2 : a''_2 : a^3_2 : a^4_2$ für den zweiten Punct,
wie $a'_3 : a''_3 : a^3_3 : a^4_3$ für den dritten Punct,
wie $a'_4 : a''_4 : a^3_4 : a^4_4$ für den vierten Punct

verhalten, so schneiden sich in diesen 4 Puncten und in den vier Ecken des Tetraëders auch drei Oberflächen zweiter Ordnung.

Der zweite Lehrsatz giebt folgenden geometrischen Satz, unter den Voraussetzungen des eben genannten Satzes:

Die 4 Puncte, deren senkrechte Abstände von den Seitenflächen des Tetraëders sich

wie $\frac{1}{a'_1} : \frac{1}{a'_2} : \frac{1}{a'_3} : \frac{1}{a'_4}$ für den ersten Punct,
wie $\frac{1}{a''_1} : \frac{1}{a''_2} : \frac{1}{a''_3} : \frac{1}{a''_4}$ für den zweiten Punct,
wie $\frac{1}{a^3_1} : \frac{1}{a^3_2} : \frac{1}{a^3_3} : \frac{1}{a^3_4}$ für den dritten Punct,
wie $\frac{1}{a^4_1} : \frac{1}{a^4_2} : \frac{1}{a^4_3} : \frac{1}{a^4_4}$ für den vierten Punct

verhalten, und die vier Ecken des Tetraëders, sind die Schnittpuncte von drei Oberflächen zweiter Ordnung.

Auf den dritten Lehrsatz werde ich Gelegenheit haben bei meinen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung angestellten Untersuchungen zurückzukommen.

Königsberg im April 1851.

7.
Über die Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen.

(Von Herrn Dr. *A. Winckler*, Grofsherzoglich-Badischem Ingenieur zu Carlsruhe.)

Nachdem *Euler*, *Laplace* u. A. die Werthe vieler, auf gewisse Grenzen ausgedehnten Integrale ermittelt hatten, deren Darstellung in geschlossener Form nur zwischen jenen Grenzen möglich ist, und welche sowohl durch ihre besondere Wichtigkeit, als durch das Eigenthümliche ihrer Herleitung weitere Forschungen zur Folge hatten, bildete sich nach und nach ein eigener Zweig der Integralgleichung, *die Theorie der bestimmten Integrale*, die jetzt für alle Theile der Analysis unentbehrlich ist.

Diese Theorie beschäftigt sich zumeist nur mit den *einfachen* Integralen (Quadraturen), obgleich sie in eben so häufige als unvermeidliche Berührung mit den *zwei- und mehrfachen* Integralen kommt.

Die Zahl der *mehrfachen* bestimmten Integrale, deren Werth vollständig ermittelt oder auf Quadraturen zurückgeführt wurde, insofern keine der verlangten Integrationen unbestimmt oder zwischen andern als den gegebenen Grenzen sich ausführen läfst, ist bis jetzt verhältnifsmäfsig gering.

Solche Integrale lassen sich zwar, auch wenn ihre Grenzen veränderlich sind, auf eine Reihe von einander unabhängiger Quadraturen (mit constanten Grenzen) reduciren, aber meistens ohne Gewinn, weil durch die Umgestaltung die Function unter dem Integralzeichen häufig verwickelter wird.

Man erdachte daher andere Methoden der Transformation. Die wesentlichsten derselben mögen hier, als zur Sache gehörig, kurz zusammengestellt werden.

1.

Die allgemeine Formel für die Transformation doppelter Integrale rührt von *Euler* her. Durch eine passende Wahl der Relationen zwischen den alten und neuen Veränderlichen sind zuweilen die beiden Integrationen, oder wenigstens eine derselben, unbestimmt ausführbar.

Es seien nämlich x und y die Veränderlichen, welche durch zwei andere u und v ersetzt werden sollen, so dafs

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \theta(u, v)$$

ist. Dann ist

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \pm\iint\left(\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{d\theta}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{d\theta}{du}\right) f(\varphi, \theta)\,du\,dv.$$

Wie bekannt dehnte *Jacobi* diese Transformation auf *n*fache Integrale aus.

Sie läfst sich, wie ebenfalls bekannt, auch geometrisch ableiten, indem man sich einen, durch die Integrations-Grenzen näher bestimmten ebenen Raum in Elemente gelegt vorstellt, welche von vier krummen Linien begrenzt sind, deren Gestalt durch die Functionen φ und θ gegeben ist, während f die *Dichtigkeit* im Puncte x, y einer über jenen Raum verbreitet angenommenen Masse bedeutet.

Die obige Gleichung giebt unmittelbar die üblichen allgemeinen Formeln für die Transformation *doppelter Integrale.* In specielleren Fällen ist ihr Nutzen von der Ermittlung einer Relation zwischen den alten und neuen Veränderlichen abhängig; welches ein integrables Differential giebt; aber selbst wenn eine solche Relation gefunden ist, bleiben noch die Grenzbedingungen zu berücksichtigen, welche sich nicht selten in demselben Maafse compliciren, wie der Ausdruck selbst, unter dem Integralzeichen, einfacher wird.

2.

Wenn man, statt eine der beiden Veränderlichen durch neue zu ersetzen, eine nach der andern eliminirt und

$$x = \varphi(z, y)$$

setzt, darauf z und x als unabhängig von y und nur y als Function von z betrachtet, so ist

$$dx = \frac{d\varphi}{dz}dz,$$

folglich

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint f(\varphi, y)\frac{d\varphi}{dz}\,dy\,dz.$$

Setzt man ferner

$$y = \theta(w), \qquad dy = \frac{d\theta}{dw}\cdot dw,$$

so ergiebt sich

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \iint f(\varphi, \theta)\cdot\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dw}\cdot dw\,dz;$$

welche Gleichung sich übrigens auch aus der allgemeinen Formel unmittelbar finden läfst.

Das Verfahren ist auch auf *mehrfache* Integrale anwendbar. Sind die Grenzbedingungen durch sogenannte Ungleichheiten gegeben, so ist es meistens nicht schwer, die Umwandlungen anzugeben, welche sie nach und nach erleiden. Die sehr wichtigen Anwendungen dieses Verfahrens sind bekannt.

3.

Nach einer andern Methode ersetzt man einen Bestandtheil der Function unter dem Integralzeichen durch ein bestimmtes Integral, oder multiplicirt das mehrfache Integral mit einem bestimmten Integrale, welches für alle Werthe der darin vorkommenden Gröſsen der Einheit dasselbe ist. Dies ist auch für die Ausführung von Quadraturen ein sehr wirksames Mittel. Bezeichnet $\varphi(t, x, y, \ldots)$ eine Function, für welche

$$\int_a^b \varphi(t, x, y, \ldots)\, dt = u$$

ist, so ist u eine Function von $x, y, \ldots$ und man erhält

$$\iint \ldots f(x,y,z,\ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots = \int_a^b \frac{\varphi(t,x,y,\ldots)}{u}\, dt \iint \ldots f(x,y,z,\ldots)\, dz\, dy\, dx \ldots$$

Durch eine passende Wahl der Function φ läſst sich das neue Integral, zumal wenn alle Grenzen constant sind, öfter leichter finden oder reduciren, als das gegebene.

Von der Anwendung auf Quadraturen nur das folgende Beispiel. Es sei k eine zwischen -1 und $+1$ liegende Constante und

$$\int_0^a \log(k\cos x + 1)\frac{dx}{\cos x},$$

so ergiebt sich, wenn man erwägt, daſs

$$\frac{\log(k\cos x + 1)}{\cos x} = \int_0^k \frac{dt}{t\cos x + 1}$$

ist, statt des einfachen ein doppeltes Integral, welches durch Umkehrung der Integrationsfolge in

$$\int_0^k dt \int_0^a \frac{dx}{t\cos x + 1}$$

übergeht. Es findet sich also

$$\int_0^a \log(k\cos x + 1)\frac{dx}{\cos x} = 2\int_0^k \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}\,.\,\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\right).$$

Setzt man hierin nach einander $\frac{1}{2}\pi$ und π statt a, so ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(k\cos x + 1)\frac{dx}{\cos x} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}\pi^2 - (\text{ars}\cos k)^2),$$

$$\int_0^{\pi} \log(k\cos x + 1)\frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin k;$$

woraus sich weitere Resultate ableiten lassen.

4.

Bezieht sich ein Doppel-Integral auf alle negativen und positiven Werthe von x und y, welche der in Form der Ungleichheit

$$a < \theta(x, y) < b$$

gegebenen Grenzbedingung entsprechen, so lassen sich daraus die Grenzen der beiden Integrationen ableiten und man erhält

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x,a)}^{\varphi(x,b)} f(x, y)\,dy.$$

Nun läfst sich im Allgemeinen jedes Doppel-Integral immer in vier andere zerlegen, in welchen Null die untere Grenze ist und deren eines unter der ihnen gemeinschaftlichen Form

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(x, y)\,dy$$

betrachtet werden möge. Wie früher bemerkt, lassen sich die Grenzen leicht in constante verwandeln. Setzt man nämlich

$$y = z\chi(x)$$

und betrachtet y und z als gleichzeitig veränderliche, von x unabhängige Gröfsen, so ist

$$dy = \chi(x)\,dz$$

und

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(x, y)\,dy = \int_0^{\xi} \chi(x)\,dx \int_0^1 f(x, z\chi(x))\,dz;$$

wobei im Allgemeinen die Integrationsordnung willkürlich ist. Es lassen sich jedoch, wie bekannt, noch in anderer Weise dem Integrale constante Grenzen geben.

Auf Doppel-Integrale hat man auch noch folgendes Verfahren angewendet.

Statt von dem Integrale

$$u = \int_0^1 dx \int_0^{\chi(x)} f(x, y)\,dy,$$

in welchem, der Allgemeinheit unbeschadet, 1 statt ξ gesetzt ist, wollen wir von dem folgenden:

$$U = \int_0^1 dx \int_0^{\chi(t,x)} f(x, y)$$

ausgehen, welches sich von dem erstern dadurch unterscheidet, dafs in $\chi(x)$ noch eine Gröfse t angenommen wird, deren nähere Bestimmung vorbehalten bleibt.

Differentiirt man U nach t, so erhält man

$$\frac{dU}{dt}=\int_0^{\chi(t,t)}f(x,y)\,dx+\int_0^t\frac{d\chi(t,x)}{dt}f(x,\chi(t,x)).\,dx.$$

Ist nun, wie man annehmen möge,

$$\chi(t,t)=0,$$

und integrirt man wieder nach t, so ergiebt sich

$$U=\int dt\int_0^t f(x,\chi(t,x))\cdot\frac{d\chi(t,x)}{dt}\cdot dx+\text{Const.}$$

Ist ferner, wie weiter angenommen werden möge,

$$\chi(1,x)=\chi(x),$$

so erhält man

$$U=u,\quad\text{wenn}\quad t=1,$$
$$U=0,\quad\text{wenn}\quad t=0.$$

Das unbestimmte Integral U zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen, giebt also u, und es ist:

$$\int_0^1 dx\int_0^{\chi(x)}f(x,y)\,dy=\int_0^1 dt\int_0^t f(x,\chi(t,x))\cdot\frac{d\chi(t,x)}{dt}\cdot dx.$$

Die hierbei vorausgesetzten Gleichungen

$$\chi(t,t)=0,\qquad \chi(1,x)=\chi(x)$$

finden Statt, z. B. für

$$\chi(x)=\cos\tfrac{1}{2}\pi,\qquad \chi(t,x)=\cos\tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{x}{t},$$

$$\chi(x)=\frac{x^m-1}{x^n+1},\qquad \chi(t,x)=\frac{x^m-t^m}{x^n+t^n}$$

u. s. f.

5.

Die schönste und erfolgreichste aller Methoden rührt von *Lejeune Dirichlet,* meinem verehrten Lehrer, her. Sie beruht, wie eine der früheren, ebenfalls auf der Einführung eines *Factors* in Integralform, dessen Werth der Einheit gleich ist, bezweckt aber nicht sowohl eine Umgestaltung der zu integrirenden Function, als vielmehr die völlige Befreiung von den Grenzbedingungen, und die Herstellung der Grenzen 0 und ∞ oder $-\infty$ und $+\infty$, zwischen welchen genommen die Werthe vieler Integrale bekannt sind. Dies

wird durch die sinnreiche Anwendung einer Function erreicht, welche so lange $=1$ bleibt, als noch die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ den Grenzbedingungen entsprechen, und welche verschwindet, wenn dies nicht mehr der Fall ist, das Integral also keine weiteren Elemente mehr in sich aufnehmen soll. Diese Function, vermöge jener Eigenschaften eine *discontinuirliche*, kann verschiedene Formen haben. Die einfachste derselben wird durch das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\cos(\alpha t)\,dt$$

dargestellt, welches in der That so lange den Werth $+1$ behält, als α zwischen -1 und $+1$ liegt, und 0 wird, wenn α diese Grenzen überschreitet.

Sind also die Grenzen eines mehrfachen Integrals

$$\iint\ldots f(x,y,z,\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots$$

durch die Ungleichheit

$$a < \theta(x,y,z,\ldots) < b$$

gegeben, werden aufserdem alle denselben entsprechenden, negativen und positiven Werthe der Veränderlichen zugelassen, und erwägt man, dafs jene Ungleichheit in die folgende:

$$\tfrac{1}{2}(a+b)-\tfrac{1}{2}(b-a) < \theta(x,y,z,\ldots) < \tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}(b-a)$$

sich verwandeln läfst, so hat man

$$-1 < \frac{2\theta-(a+b)}{b-a} < +1.$$

Da man nun, nach Hinzufügung des oben gedachten Factors, die Integration über alle möglichen Werthe sich erstrecken lassen darf, so ist

$$\iint\ldots f(x,y,z,\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots f(x,y,z,\ldots)\cos\left(\frac{2\theta-(a+b)}{b-a}\cdot t\right)dx\,dy\,dz\ldots$$

Die wichtigen Resultate, welche die Anwendung dieses Verfahrens bisher lieferte, müssen als bekannt vorausgesetzt werden.

6.

Man hat zur umfassendern Anwendung der Idee des discontinuirlichen Factors die *Fourier*'schen Integrale herbeigezogen, um noch über eine willkürliche, aber stetig bleibende Function, welche jener Factor enthält, verfügen zu können. Hierdurch wird in manchen Fällen, aufser der Wegschaffung der Grenzbedingungen, indem man die willkürliche Function passend auswählt,

noch eine Umgestaltung, resp. Vereinfachung des Ausdrucks unter dem Integralzeichen erzielt.

Nach der Theorie der *Fourier*schen Integrale ist nämlich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(tu)\,du\int_a^b \varphi(v)\cos(uv)\,dv = \varphi(t), \text{ wenn } a<t<b,$$
$$= 0, \text{ wenn } t<a \text{ oder } t>b.$$

Vermöge dieser Eigenschaften kann man die Grenzbedingungen wegschaffen, welche durch die Ungleichheiten

$$a<\theta(x,y,z,\ldots)<b$$

gegeben sind. Setzt man nämlich $\theta(x,y,z,\ldots)$ an die Stelle von t, so ist, vorausgesetzt, dafs das Integral, um dessen Ermittelung es sich handelt, auf alle negativen und positiven Werthe der Veränderlichen sich erstrecken soll, welche der Grenzbedingung entsprechen:

$$\iint\ldots f(x,y,\ldots)\,dx\,dy\ldots$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty du\int_a^b dv\int_{-\infty}^{+\infty} dx\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ldots\frac{f(x,y,\ldots)}{\varphi(\theta)}\varphi(v)\cos(u\theta)\cos(uv).$$

Hier ist φ die stetige, sonst aber willkürliche Function. Diese Formel wird insbesondere dann von Nutzen sein, wenn in $f(x,y,\ldots)$ die Veränderlichen in derselben Verbindung mit einander stehen wie in $\theta(x,y,\ldots)$, so dafs sich durch die nähere Bestimmung von φ der Bruch

$$\frac{f(x,y,\ldots)}{\varphi(\theta)}$$

möglichst vereinfachen läfst. Für $\varphi(v)=1$ erhält man die frühere Formel wieder.

7.

Dies sind die wesentlichsten der mir bekannten Methoden, welche zur Reduction mehrfacher Integrale benutzt wurden. Diejenigen, welche nur in einzelnen Fällen anwendbar sind und deren es mehrere giebt, mögen hier unberührt bleiben.

Die Hülfsmittel der Integralrechnung, als einer noch so neuen Wissenschaft, sind im Hinblicke auf die Reichhaltigkeit ihrer Probleme nicht sehr zahlreich. Es dürfen daher die Dienste nicht unbeachtet bleiben, welche *andere* Theile der Mathematik gewähren, wenn sie entweder wesentlich neue Hülfsmittel darbieten, oder doch schneller als der rein analytische Weg zum Ziele führen. *Lagrange* sagt in seinen Vorlesungen *(Séances des écoles normales, T. 4me): Tant que l'algèbre et la géométrie ont été séparés, leurs progrès*

ont été lents et leurs usage bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection.

Dies scheint in demselben Maafse auch von der Verbindung der Integralrechnung mit der *Geometrie* zu gelten. Zwar benutzte man vielfach die erstere zur Lösung von Aufgaben der letztern, aber nicht eben so umfassend war das *Umgekehrte* der Fall.

Zwar hält man bei der Darstellung rein mathematischer Disciplinen nicht mit Unrecht darauf, dafs die Einmischung geometrischer Betrachtungen unterbleibe, aber es darf die Trennung nicht bis dahin gehen, wo es sich nicht sowohl um die Darstellung des Bekannten, als vielmehr um die Ermittlung von Neuem handelt.

8.

Der Nutzen und das eigenthümliche Interesse, welche der Gebrauch der Geometrie in der Theorie der bestimmten Integrale hat, sind übrigens schon in manchen Fällen erkannt worden. Man erinnere sich in dieser Beziehung nur an das sinnreiche Verfahren, durch welches *Cauchy* den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

fand; an den Erfolg, mit welchem sich *Lamé* der sogenannten elliptischen Coordinaten bediente, und an in die interessanten Herleitungen, durch welche *Catalan, Chasles, Lobatto* und *Terquem* die Werthe mehrerer Doppel-Integrale fanden und insbesondere dasjenige auf Quadraturen reducirten, welches sich auf die Complanation des dreiaxigen Ellipsoïds bezieht. Das geometrische Verfahren scheint also in der That nicht nur fruchtbar, sondern auch von ausgezeichneten Analytikern als legitim erkannt zu sein.

9.

Zu dem oben angezogenen Beispiel möge noch die Bemerkung Platz finden, dafs ein Verfahren, welches von demjenigen etwas verschieden ist, durch welches *Cauchy* das oben angeführte Integral fand, zu einer bemerkenswerthen Darstellung desselben führt, wenn die obere Grenze nicht ∞, sondern eine beliebige Gröfse ξ ist.

Stellt man sich nämlich vor, es handle sich um die Ermittlung des Doppel-Integrals

$$\int_0^\xi dx \int_0^\xi e^{-(x^2+y^2)} dy = \left(\int_0^\xi e^{-x^2} dx\right)^2,$$

so stellt dies offenbar einen Theil des Volumens einer *Rotationsfläche* dar, dessen Basis ein Rechteck und deren dritte Ordinate

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

ist. Um dieses Volumen auf andere Art zu finden, lege man durch den Anfangspunct der Coordinaten eine gerade Linie, welche mit der Axe der x den Winkel μ bildet. Dann entsteht, wenn man μ um $d\mu$ ändert und mit den Radien r und $r+dr$ Kreisbogen beschreibt, ein Element des Sectors, dessen Inhalt $= r\,dr\,d\mu$ ist; und da $x^2+y^2=r^2$ ist, so wird das entsprechende prismatische Element durch

$$e^{-r^2}.r\,dr\,d\mu$$

ausgedrückt. Wenn man also nach r zwischen 0 und $\xi \sec\mu$ integrirt, so ergiebt sich für den körperlichen Sector:

$$d\mu \int_0^{\xi\sec\mu} e^{-r^2}.r\,dr = \tfrac{1}{2} d\mu(1-e^{-\xi^2\sec\mu^2}).$$

Dieser Ausdruck, nach μ zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ integrirt und doppelt genommen, giebt für das ganze Volumen

$$\tfrac{1}{4}\pi - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{-\xi^2\sec\mu^2} d\mu.$$

Daraus erhält man die Gleichung

$$\int_0^\xi e^{-x^2} dx = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\pi - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{-\xi^2\sec\mu^2} d\mu\right)}.$$

Führt man nun eine neue Veränderliche t statt μ ein, für welche

$$\tang\mu = \frac{t}{\xi}$$

ist, so erhält man auch

$$\int_0^\xi \frac{e^{-t^2}}{\xi^2+t^2} dt = \frac{e^{\xi^2}}{\xi}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \left(\int_0^\xi e^{-x^2} dx\right)^2\right).$$

Dieser Ausdruck, mit der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\xi^2+t^2} dt = \frac{e^{\xi^2}}{\xi}\sqrt{\pi}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^\xi e^{-x^2} dx\right)$$

verglichen, führt zu der Relation

$$\int_0^\xi \frac{e^{-t^2}}{\xi^2+t^2} dt = \left\{1 - \frac{\xi}{\pi} e^{-\xi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\xi^2+t^2} dt\right\} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{\xi^2+t^2} dt.$$

Zerlegt man das Volumen in cylinderische Schichten, deren Axe mit der

z Axe zusammenfällt, so erhält man

$$\int_0^{\xi} e^{-x^2}dx = \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}\pi(1-e^{-2\xi^2})-2\int_{\xi}^{\xi\sqrt{2}} e^{-r^2}r\arccos\frac{\xi}{r}dr\right\}}.$$

Diese Gleichung (freilich weniger einfach) läfst sich auch aus der zuerst gefundenen ableiten.

10.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich nun zur nähern Bezeichnung des Problems, mit dessen Lösung sich die folgenden Artikel beschäftigen werden. Dasselbe bezieht sich auf die Reduction der zwischen veränderlichen und constanten Grenzen genommenen *Doppel-Integrale* beliebiger, nur nach ihrem Argument näher bestimmter Functionen auf einfache Integrale. Der Gegenstand findet sich bei Weitem nicht, besonders in den Lehrbüchern, mit eben der Ausführlichkeit bearbeitet, wie die Entwicklung einfacher Integrale. Es dürfte daher die Aufgabe nicht ganz undankbar sein.

Die zur Lösung anzuwendenden Hülfsmittel entspringen aus der Mannigfaltigkeit der Arten, einen gegebenen Raum zu theilen oder in seine Elemente zu zerlegen. Das Verfahren wird sich aus der Anwendung auf die einzelnen Fälle erkennen lassen.

Die Resultate, welche, soviel mir bekannt, fast insgesammt neu sind, lassen sich zwar auch auf rein analytischem Wege erlangen, aber nicht so einfach wie hier. Den Werth einer Methode schätzt man gewöhnlich nach ihrem Nutzen in einzelnen Fällen. Hat nun auch in dem Folgenden, indem einzelne Fälle vollständig erledigt wurden, das Verfahren nicht überall denselben Erfolg, so ist doch nicht zu übersehen, dafs Ähnliches auch bei allen andern Methoden der Fall ist. Indessen wird sich zeigen, dafs es zur Entwickelung in Reihen sichere Anhaltpuncte für die Ermittlung der Grenzen der Quadraturen giebt, aus welchen sich das Doppel-Integral zusammensetzen läfst.

11.

Wie bemerkt, lassen sich im Allgemeinen alle Doppel-Integrale in Ausdrücke von der Form

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy$$

zerlegen, wo $\chi(x)$ eine gegebene Function von x, oder constant ist.

Ein Doppel-Integral läfst sich als den Ausdruck des *Volumens eines Körpers* betrachten, welcher von einer Oberfläche, deren Ordinaten $=f(x,y)$

sind, begrenzt wird und welcher eine Figur zur Basis hat, die von den Axen x und y, von der Ordinate $\chi(\xi)$ und von der Curve, deren Gleichung

$$y = \chi(x)$$

ist, begrenzt wird.

Sowohl die Oberfläche (also die Function $f(x,y)$), als auch die Curve, resp. die Function $\chi(x)$, nehme man hier, wo es zunächst nur auf die Ermittlung im Allgemeinen gültiger Reductionsformeln ankommt, durchgehends als *endlich* und *stetig* an und, wo in Folge der Mehrförmigkeit dieser Functionen besondere Betrachtungen nöthig sind, auch als *einförmig*, so weit sich die Integration erstreckt, und überlasse das Übrige, wo diese Hypothesen nicht Statt finden, besondern Untersuchungen. Auch nehme man an, dafs für alle in dem Raume der Curve $y = \chi(x)$ liegenden Puncte die Function $f(x,y)$ *reell* sei.

Wenn die Function für Werthe von x und y, welche in den Umfang der Integration fallen, ihr Zeichen ändert, also die begrenzende krumme Oberfläche die xy Ebene schneidet und ein Theil des Raums *unterhalb* dieser Ebene liegt, so sehe man ihn als einen negativen Theil des Volumens an, damit dasselbe als der vollständige Ausdruck des Doppel-Integrals betrachtet werden könne.

12.

Unter Beobachtung gewisser Regeln darf man, sowohl wenn $\chi(x)$ veränderlich, als wenn es constant ist, die Aufeinanderfolge der Integrationen des bezeichneten Doppel-Integrals *umkehren*. Dies vor Allem soll gezeigt werden.

Die Elemente des Raums (Taf. III. Fig. 1.), deren irgend eines $= f(x,y)\,dx\,dy$ ist, lassen sich nämlich in Schichten, parallel sowohl mit der xz als mit der yz Ebene anordnen; und jeder solcher Anordnung entspricht eine andere Integrationsfolge. Wird zuerst nach y integrirt, so erhält man die Summe der auf unendlich schmalen, mit der Axe der y parallelen Rechtecken stehenden Räume. Integrirt man dagegen zuerst nach x, so entspricht dieser Ordnung eine Theilung der Basis in unendlich schmale Rechtecke parallel mit der x Axe und eine Zerlegung derselben in ein Rechteck und in ein von der gegebenen Curve begrenztes Dreieck. Die auf diesen beiden Figuren stehenden Räume werden also durch zwei Integrale dargestellt, bei welchen die Integrationsfolge die umgehrte der gegebenen und deren Summe dem Doppel-Integrale gleich ist. Diese Integrale sind

$$\int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\xi} f(x,y)\,dx, \qquad \int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)} dy \int_0^{x} f(x,y)\,dx.$$

Wenn man nun aus der Gleichung $y = \chi(x)$

$$x = \psi(y)$$

ableitet, so erhält man die folgende bemerkenswerthe Gleichung:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\xi} f(x,y)\,dx - \int_{\chi(0)}^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

Einige Beispiele mögen den Gebrauch und die Bedeutung dieser Gleichung näher zeigen.

13.

1°. Es sei $\chi(x) = \eta$ constant, so ergiebt sich

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x,y)\,dy = \int_0^{\eta} dy \int_0^{\xi} f(x,y)\,dx;$$

welche Gleichung einen bekannten Satz ausspricht.

2°. Es sei $f(x,y) = 1$, so ergiebt sich unmittelbar

$$\int_0^{\xi} \chi(x)\,dx = \xi\chi(\xi) - \int_{\chi(0)}^{\chi(\xi)} \psi(y)\,dy;$$

welches das Verfahren der sogenannten theilweisen Integration ist.

3°. Für

$$f(x,y) = x^m F(y)$$

findet man

$$\int_0^{\xi} x^m\,dx \int_0^{\chi(x)} F(y)\,dy = \frac{\xi^{m+1}}{m+1} \int_0^{\chi(\xi)} F(y)\,dy - \frac{1}{m+1} \int_{\chi(0)}^{\chi(\xi)} F(y).\psi(y)^{m+1} dy,$$

und wenn $m = 0$ ist,

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} F(y)\,dy = \xi \int_0^{\chi(\xi)} F(y)\,dy - \int_{\chi(0)}^{\chi(\xi)} F(y)\psi(y)\,dy.$$

Die *analytische* Herleitung dieser Formel ist der Gegenstand einer Abhandlung des Herrn Prof. *Schlömilch,* in welcher er dieselbe zuerst mittheilte.

4°. Auf gleiche Weise findet man

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} \frac{F(y)}{1+x^2}\,dy$$

$$= \operatorname{arc\,tang}\xi . \int_0^{\chi(\xi)} F(y)\,dy - \int_{\chi(0)}^{\chi(\xi)} F(y) \operatorname{arc\,tang}\psi(y)\,dy.$$

5°. Wir wollen noch des besondern Falles erwähnen, wenn die obere Grenze $\chi(x)$ so beschaffen ist, dafs

$$\chi(0) = 0$$

wird. Dann hat man

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^{\chi(\xi)} dy \int_{\psi(y)}^{\xi} f(x,y)\,dx.$$

Um auch hier ein Beispiel zu geben, setze man

$$f(x,y) = \frac{(x-\psi(y))^{m-1}(\xi-x)^{n-1}}{(\xi-\psi(y))^{m+n-1}}\cdot F(y)$$

und eliminire x durch eine neue Veränderliche t, für welche

$$t = \frac{\xi-x}{x-\psi(y)}, \qquad x = \frac{t\psi(y)+\xi}{t+1},$$

$$t+1 = \frac{\xi-\psi(y)}{x-\psi(y)}, \qquad dx = \frac{\psi(y)-\xi}{(t+1)^2}dt$$

ist. Da nun

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1}dt}{(t+1)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ist, so erhält man die bemerkenswerthe Gleichung

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} \frac{(x-\psi(y))^{m-1}(\xi-x)^{n-1}}{(\xi-\psi(y))^{m+n-1}}\cdot F(y)\,dy = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^{\chi(\xi)} F(y)\,dy.$$

Specialisirt man noch weiter und setzt

$$\chi(x) = x \quad \text{also} \quad \psi(y) = y,$$
$$m+n = 1 \quad \text{und} \quad 0 < n < 1,$$

so folgt

$$\int_0^\xi dx \int_0^x \frac{(\xi-x)^{n-1}}{(x-y)^n}\cdot F(y)\,dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}\int_0^\xi F(y)\,dy.$$

Diese Formel fand zuerst *Abel*. (S. dieses Journal I. Band.)

6°. Ebenfalls unter der Annahme $\chi(0) = 0$ setze man

$$f(x,y) = \left(\frac{\xi-x}{x-\psi(y)}\right)^n\cdot\frac{F(y)}{\xi-2x+\psi(y)},$$

transformire unter der Voraussetzung $-1 < n < +1$, wie oben durch die Gröfse t und bemerke, dafs

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{t^2-1}dt = \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}n\pi)$$

ist. Dies giebt die Formel

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} \left(\frac{\xi-x}{x-\psi(y)}\right)^n\cdot\frac{F(y)}{\xi-2x+\psi(y)}\,dy = \tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}n\pi\int_0^{\chi(\xi)} F(y)\,dy.$$

Specialisirt man auch hier noch weiter und setzt

$$\chi(x) = x, \quad \text{also} \quad \psi(y) = y,$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\xi dx \int_0^x \left(\frac{\xi-x}{x-y}\right)^n \frac{F(y)}{\xi-2x+y}\,dy = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}n\pi \int_0^\xi F(y)\,dy.$$

7°. Wenn in der allgemeinen Formel $\chi(x)$ so beschaffen ist, dafs

$$\chi(\xi) = 0,$$

so ist

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^{\chi(0)} dy \int_0^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

U. s. f.

14.

Wenn in den, für die Umkehrung der Integrationsfolge gefundenen Formeln nach einer der beiden Veränderlichen die Integration ausgeführt werden kann, so sind sie zugleich *Reductions-Formeln.* Dies wird aber, im Allgemeinen, nur dann der Fall sein, wenn die Characteristik f der Function unter dem Integralzeichen näher bestimmt ist. Durch solche Bestimmung würde jedoch die Allgemeinheit, nach welcher hier vor Allem gestrebt wird, fast ganz verloren gehen. Ich habe deshalb in dem Folgenden einen Weg eingeschlagen, auf welchem die Reduction ohne Spezialisirung des Functionenzeichens, ja selbst für die volle Allgemeinheit der obern Grenze $\chi(x)$ gelingt, wenn nur die Art und Weise, wie x und y zusammen in der Function auftreten, also das Argument derselben, gegeben ist. Dafs jedoch auch hierbei nicht von der *vollständigen* Lösung aller derartigen Aufgaben die Rede sein könne, versteht sich.

Noch ist zu bemerken, dafs bei der vollständigen Lösung der Aufgabe die Reduction des Doppel-Integrals auf ein algebraisches Problem, nämlich auf die Auflösung einer gewissen Gleichung, zurückgeführt wird. Wir kommen zur Sache.

15.

Nimmt man an, es sei zwischen den Gröfsen x, y, z, deren letzte das Argument der Function unter dem Doppel-Integrale bezeichnen möge, eine Gleichung gegeben, so stellt der Zusammenhang derjenigen Werthe von x und y, für welche z constant bleibt, offenbar eine krumme Linie in der xy Ebene dar, *über* welcher die Ordinate $f(z)$ der krummen Fläche, die das (§. 11.) bezeichnete Volumen begrenzt, unveränderlich bleibt. Läfst man den Parameter z alle möglichen Werthe annehmen, so wird die Gesammtheit der daraus entstehenden Curven jene Beziehung der Gröfsen x, y, z unter sich

repräsentiren. Irgend zwei dieser Curven, welche unmittelbar auf einander folgen und für welche die Werthe von z nur um beliebig wenig von einander verschieden sind, schliefsen mit einander einen schmalen Streifen ein, welcher als Basis einer cylinderischen Schale betrachtet werden kann, deren Höhe $= f(z)$ ist.

Zwei einander am nächsten liegende Elemente jener Curven sind parallel; oder vielmehr, wenn irgend zwei Curven, welche von den Parametern z und Z abhangen, sich schneiden und aus der kleinen Änderung dieser Parameter zwei weitere, sich schneidende Curven entstehen, so ist die von allen vier Curven eingeschlossene Figur ein Parallelogramm. Der Beweis hiervon ist auf bekannte Weise leicht, und darf also übergangen werden.

16.

Hieraus ergiebt sich nun der Ausdruck für das aus zwei solchen Curven und zwei mit der y Axe parallelen geraden Linien gebildete Element des oben bezeichneten Streifens. Derselbe ist

$$= \left(\frac{dy}{dz}\right) dz dx$$

und also der des Flächenstreifens zwischen zwei Curven:

$$ds = dz \left\{ \int \left(\frac{dy}{dz}\right) dx + \text{Const.} \right\}.$$

Die Grenzen dieses Integrals ergeben sich aus den Curven, nach welchen eine mit xy parallele Ebene die krumme Fläche in ihren auf einander folgenden Lagen schneidet. Man mufs zu dem Ende den successiven Verlauf dieser Curven untersuchen. Aus den Durchschnittspuncten ihrer Projection auf die xy Ebene mit der Curve $y = \chi(x)$ und der Axen der x und y, werden alsdann jene Grenzen abgeleitet.

Weiter erhält man für das Volumen-Element den Ausdruck

$$f(z)\, ds,$$

also für die Summe dieser Elemente:

$$\int f(z)\, dz \left\{ \int \left(\frac{dy}{dz}\right) dx + \text{Const.} \right\};$$

wozu abermals eine Constante kommt.

Auf ganz gleiche Weise findet man für diese Summe auch noch den Ausdruck

$$\int f(z)\, dz \left\{ \int \left(\frac{dx}{dz}\right) dy + \text{Const.} \right\}.$$

Wir werden uns jedoch an den ersteren halten.

Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dafs diese Transformation des Doppel-Integrals mit der in (§. 2.) erwähnten zusammenfällt. Nur in Rücksicht auf die Grenzen der Integration nach z ist noch Einiges zu erinnern.

Der wesentlichste Dienst, welchen die geometrische Repräsentation leistet, besteht in der erleichterten ***Bestimmung der Grenzen.*** Wenn hierbei, namentlich in Hinsicht auf z, noch einige Aufmerksamkeit nöthig ist, so betrifft sie die ***Zeichenbestimmung.***

Werden unter diesen oder jenen, sich nicht widersprechenden Annahmen die Zeichen und, wenn es nöthig, auch die Werthe der in z vorkommenden Constanten und die Lage und Gestalt der Curven und Flächen bestimmt; wird also, wie man sagt, ein Normalfall fixirt und danach der Werth des Doppel-Integrals festgesetzt: so gilt dieser Fall, in der Regel, auch für alle andern Fälle, sobald die früheren Voraussetzungen Statt finden.

Aus dem Normalfall wird sich ergeben, nach welcher Richtung hin die Ordinate z einer zweiten krummen Fläche, welche mit derjenigen, deren Ordinate $f(z)$ ist, im Zusammenhange steht, wächst oder abnimmt, also welches Zeichen dz bekommt, wenn dx und dy positiv sind. Daraus wird man ferner finden, ob ds und dz gleiche, oder entgegengesetzte Zeichen haben, und wie man die Grenzen nehmen mufs, um, abgesehen von dem Zeichen von $f(z)$, die positive Summe der Elemente zu finden. Die Curve $y = \chi(x)$ sehen wir als in dem Raume der positiven Halb-Axen liegend an.

Die Anwendung dieser Regeln in den folgenden besonderen Fällen wird weitere allgemeine Ausführungen ersparen.

17.

Zu einem ersten Beispiel sei

$$z = ax + by,$$

und es werde also die Reduction des Doppel-Integrals

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(ax+by)\,dy$$

verlangt.

Man könnte hier dem Argumente noch ein constantes Glied c hinzufügen und dasselbe dadurch etwas verallgemeinern. Indessen ist klar, dafs man für diese Fälle die Formeln aus jenen, in welchen dieses constante Glied weggelassen ist, unmittelbar erhält, wenn man an die Stelle von z einfach $z+c$ setzt. Wir werden daher, der Kürze wegen, fast in allen folgenden Fällen dieses Glied weglassen.

Die Ordinate z (Fig. 2.) gehört offenbar einer *Ebene* und $f(ax+by)$ einer *Cylinderfläche* an, deren Erzeugungslinien mit der xy Ebene parallel sind. Die Streifen (ds), für welche diese Ordinaten unveränderlich bleiben, sind also, von parallelen geraden Linien eingeschlossen, *Parallelogramme*. Auch hat man

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)=\frac{1}{b},$$

also

$$ds=\frac{dz}{b}(x+\text{Const.}).$$

Nimmt man a und b positiv an, so werden jene geraden Linien mit der x-Axe einen stumpfen Winkel einschliefsen, und man mufs den Raum, welchen das Doppel-Integral darstellt, hinsichtlich der Grenzen in drei abgesondert zu berechnende Theile zerlegen.

Die Werthe von x, zwischen welchen ds für den ersten, zweiten und dritten Theil zu nehmen ist, erstrecken sich vermöge der Annahmen beziehungsweise

$$\text{von}\ \ 0\ \ \text{bis}\ \frac{z}{a},$$
$$\text{von}\ \psi(z)\ \text{bis}\ \frac{z}{a},$$
$$\text{von}\ \psi(z)\ \text{bis}\ \xi;$$

wo $x=\psi(z)$ die einzige von 0 bis ξ vorkommende reelle Wurzel der Gleichung

$$ax+b\chi(x)-z=0$$

ist. Die entsprechenden Werthe von ds sind also

$$\frac{z}{ab}dz;\quad \frac{z-a\psi(z)}{ab}dz;\quad \frac{\xi-\psi(z)}{ab}dz.$$

Multiplicirt man dieselben mit $f(x)$ und integrirt jeden einzelnen Theil, so ist rücksichtlich der Grenzenbestimmung nur zu beachten, dafs in Folge der über die Zeichen der Constanten a und b gemachten Bestimmung, 0 der kleinste vorkommende Werth von z und also dieser die unterste Grenze ist. Jene Integrale, sind daher, in Bezug auf z,

$$\text{von}\ \ 0\ \ \text{bis}\ b\chi(0),$$
$$\text{von}\ b\chi(0)\ \text{bis}\ a\xi,$$
$$\text{von}\ a\xi\ \text{bis}\ a\xi+b\eta$$

zu nehmen; wo zur Abkürzung, wie durchgehends,

$$\chi(\xi)=\eta$$

gesetzt ist. Es findet sich also für das Volumen der Ausdruck

$$\frac{1}{ab}\int_0^{b\chi(0)} z f(z)\,dz + \frac{1}{ab}\int_{b\chi(0)}^{a\xi}(z - a\psi(z))f(z)\,dz + \frac{1}{b}\int_{a\xi}^{a\xi+b\eta}(\xi-\psi(z))f(z)\,dz$$

oder, nach einigen Umformungen, die Gleichung

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(ax+by)\,dy$$
$$= \frac{1}{b}\Big\{\int_0^{a\xi+b\eta}(\xi-\psi(z))f(z)\,dz + \int_0^{b\chi(0)}\psi(z)f(z)\,dz\Big\}$$
$$+ \frac{1}{ab}\int_0^{a\xi}(z-a\xi)f(z)\,dz.$$

Die Reduction des Doppel-Integrals ist also auf die Auflösung einer Gleichung gebracht.

Aus dieser Formel ergeben sich einige besondere Fälle. Setzt man nämlich $a=0$, $b=1$, so nimmt das dritte Glied eine unbestimmte Form an. Bei näherer Untersuchung aber findet man Null für seinen wahren Werth und erhält die in (§. 12.) gefundene Formel (3.) wieder.

Ist ferner $\chi(x)=\eta$ constant, so wird

$$\psi(z) = \frac{z-b\eta}{a}$$

und man hat die symmetrische Gleichung

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ax+by)\,dy$$
$$= \frac{1}{ab}\Big\{\int_0^{a\xi}(z-a\xi)f(z)\,dz + \int_0^{a\xi+b\eta}(a\xi+b\eta-z)f(z)\,dz$$
$$+ \int_0^{b\eta}(z-b\eta)f(z)\,dz\Big\}.$$

U. s. w.

18.

Das Argument der Function sei der Quotient zweier linearen Ausdrücke, nämlich

$$z = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}.$$

Die Gestalt der krummen Fläche (Fig. 3.), welcher diese Gleichung angehört, ergiebt sich wie folgt.

Es giebt Werthe von x und y, für welche z wesentlich unbestimmt ist. Diese Werthe sind:

$$x_0 = \frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}, \quad y_0 = \frac{a\gamma-\alpha c}{b\alpha-\beta a}.$$

Daraus folgt, dafs eine mit der z Axe parallele gerade Linie existirt, welche in allen ihren Puncten die krumme Fläche trifft. Ferner enthält die Fläche ein System gerader Linien, welche, insgesammt mit der xy Ebene parallel, in der Projection durch den Punct (x_0, y_0) gehen und durch die Gleichung

$$(\alpha z - a)x + (\beta z - b)y + \gamma z - c = 0$$

bestimmt werden. Durch irgend eine mit der z Axe parallele Ebene geschnitten, giebt die Fläche *Hyperbeln*. Aufserdem hat sie eine Asymptoten-Ebene, welche, mit der z Axe parallel, ebenfalls durch den Punct (x_0, y_0) geht und die Axen der x und y in den Abständen $-\frac{\gamma}{\alpha}$, $-\frac{\gamma}{\beta}$ vom Anfangspuncte an gerechnet, schneidet.

Es ist noch hinzuzufügen, dafs die Fläche die xy Ebene nach einer *geraden Linie* schneidet, welche in den Abständen $-\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{b}$ vom Anfangspuncte an gerechnet, die Axen der x und y durchkreuzt.

Nimmt man die Coëfficienten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ insgesammt positiv an, so ist wenigstens einer der Werthe x_0, y_0 negativ und es wird z für die hier allein in Betracht kommenden positiven Werthe von x und y beständig positiv bleiben; aber abnehmen, wenn x und y wachsen. Der Punct x_0, y_0 fällt mithin nicht in den Umfang der Integration.

Da die geraden Linien in der Projection in einem Puncte zusammenlaufen, so sind die Streifen (ds) nicht mehr wie im vorigen Beispiele Parallelogramme, sondern kleine *Dreiecke*.

19.

Nun ist

$$\left(\frac{dy}{dz}\right) = \frac{(b\alpha - \beta a)x + b\gamma - \beta c}{(\beta z - b)^2},$$

folglich

$$ds = \frac{dz}{(\beta z - b)^2}\int((b\alpha - \beta a)x + b\gamma - \beta c)dx$$

oder

$$ds = \tfrac{1}{2}(b\alpha - \beta a)((x - x_0)^2 + \text{Const.})\frac{dz}{(\beta z - b)^2}.$$

Das Volumen zerfällt in drei Theile, von welchen jeder einzeln zu berechnen ist. Die Werthe von x, zwischen welchen ds zu nehmen, findet man nach dem Vorhergehenden für den ersten, zweiten und dritten Theil ohne Schwierigkeit wie folgt. Gesetzt man habe die Gleichung

$$(\alpha z - a)x + (\beta z - b)\chi(x) + \gamma z - c = 0$$

nach x aufgelöset und

$$x = \psi(z)$$

gefunden. Man setze ferner zur Abkürzung

$$x_1 = -\frac{\gamma z - c}{\alpha z - a},$$

so sind die Grenzen von x obiger drei Theile

von x_1 bis ξ,
von x_1 bis $\psi(z)$,
von x_1 bis 0

auszudehnen und die entsprechenden Werthe von ds sind

$$\tfrac{1}{2}(b\alpha - \beta a)\left\{(\xi - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2\right\}\frac{dz}{(\beta z - b)^2},$$

$$\tfrac{1}{2}(b\alpha - \beta a)\left\{(\psi(z) - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2\right\}\frac{dz}{(\beta z - b)^2},$$

$$\tfrac{1}{2}(b\alpha - \beta a)\left\{x_0^2 - (x_1 - x_0)^2\right\}\frac{dz}{(\beta z - b)^2}.$$

Werden diese Ausdrücke mit $f(z)$ multiplicirt, darauf beziehungsweise

von $\frac{a\xi + c}{\alpha\xi + \gamma}$ bis $\frac{a\xi + b\eta + c}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}$,
von $\frac{a\xi + b\eta + c}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}$ bis $\frac{b\chi(0) + c}{\beta\chi(0) + \gamma}$,
von $\frac{b\chi(0) + c}{\beta\chi(0) + \gamma}$ bis $\frac{c}{\gamma}$

integrirt und die Producte addirt, so erhält man die Formel

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) dy$$

$$= \frac{(a\gamma - \alpha c)^2}{2(b\alpha - \beta a)} \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi + c}{\alpha\xi + \gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\alpha z - a)^2} + \frac{(b\gamma - \beta c)^2}{2(a\beta - \alpha b)} \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\chi(0) + c}{\beta\chi(0) + \gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\beta z - b)^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(b\alpha - \beta a)\left(\xi - \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - \alpha b}\right)^2 \int_{\frac{a\xi + c}{\alpha\xi + \gamma}}^{\frac{a\xi + b\eta + c}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\beta z - b)^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a\beta - \alpha b) \int_{\frac{b\chi(0) + c}{\beta\chi(0) + \gamma}}^{\frac{a\xi + b\eta + c}{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}} \left(\psi(z) - \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - \alpha b}\right)^2 \frac{f(z)\,dz}{(\beta z - b)^2}.$$

Einige besondere Fälle dieser Formel sind folgende.

20.

Es sei

$$\alpha=\beta=1;\quad c=\gamma=-1 \quad \text{und} \quad a<1,\quad b<1.$$

Die Grenzen des Doppel-Integrals seien durch die Ungleichheit

$$0<x+y<1$$

gegeben, also

$$\chi(x)=1-x,\quad \xi=1,\quad \eta=0.$$

Vor Allem ist zu bemerken, dafs bei diesen Annahmen alle vorkommenden Werthe von z durchaus positiv sind; wie es sich aus der Ansicht der Gleichung

$$z=\frac{ax+by-1}{x+y-1}$$

ergiebt. Folglich gehen die beiden Grenzen

$$\frac{a\xi+c}{\alpha\xi+\gamma},\quad \frac{b\chi(0)+c}{\beta\chi(0)+\gamma}$$

in das positiv Unendliche über.

Ferner zeigt sich, dafs der Punct (x_0, y_0) in die Gerade fällt, deren Gleichung $y=1-x$ ist. Man erhält also

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f\left(\frac{ax+by-1}{x+y-1}\right)dy=\frac{(a-1)^2}{2(b-a)}\int_1^\infty\frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+\frac{(b-1)^2}{2(a-b)}\int_1^\infty\frac{f(z)dz}{(z-b)^2}$$

und, da sich die beiden Integrale vereinigen lassen und

$$\frac{1}{2(a-b)}\left\{\left(\frac{b-1}{z-b}\right)^2-\left(\frac{a-1}{z-a}\right)^2\right\}=\frac{1}{2(z-a)(z-b)}\left\{\frac{1-a}{z-a}+\frac{1-b}{z-b}\right\}$$

ist, so ergiebt sich die bekannte Formel

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f\left(\frac{ax+by-1}{x+y-1}\right)dy=\tfrac{1}{2}\int_1^\infty\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\left\{\frac{1-a}{z-a}+\frac{1-b}{z-b}\right\}dz.$$

Setzt man in der allgemeinen Formel

$$a=1,\quad b=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=1,$$

so geht sie in

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{x}{y}\right)dy=\tfrac{1}{2}\left\{\xi^2\int_{\frac{\xi}{\eta}}^\infty f(z)\cdot\frac{dz}{z^2}+\int_0^{\frac{\xi}{\eta}} f(z)\cdot\frac{\psi(z)^2}{z^2}dz\right\}$$

über, wo $\psi(z)$ aus der Gleichung $x-z\chi(x)=0$ abzuleiten ist.

Wir wollen weiter annehmen, es sei $\chi(x)=\eta$ constant. Dann ist

$$\psi(z)=-\frac{(\beta z-b)z+\gamma z-c}{\alpha z-a}$$

und es findet sich nach einigen naheliegenden Transformationen die symmetrische Formel

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) dy$$

$$= \frac{(a\gamma-\alpha c)^2}{2(b\alpha-\beta a)} \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi+c}{\alpha\xi+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\alpha z-a)^2} + \frac{(b\gamma-\beta c)^2}{2(a\beta-\alpha b)} \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\eta+c}{\beta\eta+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\beta z-b)^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(b\alpha-\beta a)\left(\xi - \frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}\right)^2 \int_{\frac{a\xi+c}{\alpha\xi+\gamma}}^{\frac{a\xi+b\eta+c}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\beta z-b)^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a\beta-\alpha b)\left(\eta - \frac{a\gamma-\alpha c}{b\alpha-\beta a}\right)^2 \int_{\frac{b\eta+c}{\beta\eta+\gamma}}^{\frac{a\xi+b\eta+c}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\alpha z-a)^2}.$$

Hieraus folgt z. B.

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(\frac{x}{y}\right) dy = \tfrac{1}{2}\left\{\xi^2 \int_{\frac{\xi}{\eta}}^{\infty} f(z)\frac{dz}{z^2} + \eta^2 \int_0^{\frac{\xi}{\eta}} f(z)\,dz\right\}.$$

Die Anwendung dieser Ergebnisse auf einzelne Fälle, z. B. auf

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{(ax^{2m}+2bx^m y^m+cy^{2m})^n}{(\alpha x^{2n}+2\beta x^n y^n+\gamma y^{2n})^m},$$

mag hier nicht näher berührt werden.

21.

Das Argument sei nun ein Ausdruck zweiten Grades von x und y, und zwar

$$z = ax^2+2bxy+cy^2+2mx+2ny.$$

Setzt man hierin x_0+x und y_0+y statt x und y, so lassen sich x_0 und y_0 so bestimmen, dafs die ersten Potenzen der Veränderlichen wegfallen und also das Argument, insofern es veränderlich ist, nur noch die Form

$$z = ax^2+2bxy+cy^2$$

hat. Diese Reduction gilt aber nicht mehr, wenn

$$ac-b^2 = 0$$

ist. In diesem Falle bekommt das Argument die Form

$$z = \frac{(ax+by)^2}{ab}+2mx+2ny.$$

Vorausgesetzt, es seien alle Coëfficienten positiv und auch

$$bm - an > 0,$$

so entspricht dieser Gleichung eine Reihe von ***Parabeln,*** welche sich nach der Richtung der negativen x öffnen und deren Scheitel für wachsende Werthe von z nach der Richtung der positiven x fortrücken. Man hat dann

$$ds = -\frac{dz}{2(bm-an)}\{\sqrt{(abz + a^2n^2 - 2a(bm-an))x} + \text{Const.}\}$$

und dieser Ausdruck ist

$$\text{von } 0 \text{ bis } \frac{-bm + \sqrt{(abz + b^2m^2)}}{a},$$

$$\text{von } \psi(z) \text{ bis } \frac{-bm + \sqrt{(abz + b^2m^2)}}{a},$$

$$\text{von } \psi(z) \text{ bis } \xi$$

zu nehmen; wobei $\psi(z)$ aus der Gleichung

$$\frac{(ax + b\chi(x))^2}{ab} + 2(mx + n\chi(x)) - z = 0$$

gesucht werden mufs.

Multiplicirt man die drei sich ergebenden Werthe von ds mit $f(z)$ und integrirt sie beziehungsweise

$$\text{von } 0 \text{ bis } \frac{b\chi(0)^2}{a} + 2n\chi(0),$$

$$\text{von } \frac{b\chi(0)^2}{a} + 2n\chi(0) \text{ bis } \frac{a\xi^2}{b} + 2m\xi,$$

$$\text{von } \frac{a\xi^2}{b} + 2m\xi \text{ bis } \frac{(a\xi + b\eta)^2}{ab} + 2(m\xi + n\eta),$$

so giebt die Summe der drei einfachen Integrale den Werth des Doppel-Integrals

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f\left\{\frac{(ax+by)^2}{ab} + 2(mx+ny)\right\} \cdot dy.$$

Ist $\chi(x) = \eta$ constant, so ist für $\psi(z)$ der Ausdruck

$$\frac{1}{a}(-b(m+\eta) + \sqrt{[abz + b^2m + 2b(bm-an)]\eta})$$

zu setzen und es findet sich wieder eine symmetrische Formel.

Setzen wir nun den Fall, in welchem das Argument

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

ist. Über die Gestalt der krummen Fläche, welcher diese Gleichung angehört, läfst sich aus den folgenden Andeutungen eine klare Vorstellung erlangen.

Die Curven, über welchen die Ordinate z unveränderlich bleibt, sind *Ellipsen* oder *Hyperbeln*, je nachdem $ac-b^2$ positiv oder negativ ist. Im ersten Falle ist die Fläche ein *elliptisches*, im letzten ein *hyperbolisches Paraboloïd*. Aufserdem wollen wir, um uns auf bestimmte Figuren beziehen zu können, a, b, c positiv annehmen.

22.

A. Es sei

$$ac-b^2>0,$$

so ist vor Allem klar, dafs z nicht negativ werden kann, indem

$$z=\frac{(ax+by)^2+(ac-b^2)y^2}{a}$$

ist. Der zur y Axe (Fig. 4.) conjugirte Durchmesser dieser *Ellipsen* hat zur x Axe eine durch den Bruch $-\frac{b}{c}$ bestimmte Neigung, welche daher 90^0 überschreitet. Die Axen dieser Ellipsen wachsen wie die Quadratwurzel aus z; auch fallen sie der Richtung nach zusammen. Die Ellipsen sind *concentrisch* und breiten sich über die ganze xy Ebene aus. Nun ist

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)=+\frac{1}{2\sqrt{(cz-(ac-b^2)x^2)}},$$

also

$$ds=\frac{dz}{2\sqrt{(ac-b^2)}}\left\{\arcsin\left(\frac{x\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(cz)}}\right)+\text{Const.}\right\}.$$

Vorausgesetzt man habe aus der Gleichung

$$ax^2+2bx\chi(x)+c\chi(x)^2-z=0,$$

die einzige zwischen 0 und ξ vorkommende reelle Wurzel $x=\psi(z)$ entwickelt, so sind die Grenzen, zwischen welchen ds genommen werden mufs, beziehungsweise für den ersten, zweiten und dritten Theil des durch das Doppel-Integral ausgedrückten Volumens,

von 0 bis $\sqrt{\frac{z}{a}}$,
von 0 bis ξ,
von $\psi(z)$ bis ξ

zu erstrecken. Wenn man die resultirenden Werthe mit $f(z)$ multiplicirt und dann nach z, beziehlich

von 0 bis $a\xi^2$,
von $a\xi^2$ bis $c\chi(0)^2$,
von $c\chi(0)^2$ bis $a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$

integrirt, so wird man nach einigen Reductionen, welche sich leicht ergeben, die folgende Formel finden:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f(ax^2+2bxy+cy^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{2(ac-b^2)}\Big\{\arccos\frac{b}{\sqrt{(ac)}}\int_0^{a\xi^2} f(z)\,dz + \int_{a\xi^2}^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z)\arcsin\frac{\xi\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(cz)}}\,dz$$

$$+\int_{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}^{c\chi(0)^2} f(z)\arcsin\frac{\psi(z)\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(cz)}}\,dz\Big\}.$$

Wir wollen einiger besondern Fälle dieser Formel gedenken.

Es sei $\chi(x)=\eta$ constant. Berücksichtigt man, dafs dann

$$\psi(z) = \frac{1}{a}\{-b\eta+\sqrt{(az-(ac-b^2)\eta)}\}$$

und also

$$\arcsin\frac{\psi(z)\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(cz)}} = \arccos\frac{b}{\sqrt{(ac)}} - \arcsin\frac{\eta\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(ac)}}$$

ist, so erhält man

$$\int_0^\xi dx\int_0^\eta f(ax^2+2bxy+cy^2)\,dy$$

$$= \frac{\arccos\frac{b}{\sqrt{(ac)}}}{2\sqrt{(ac-b^2)}}\Big\{\int_0^{a\xi^2} f(z)\,dz - \int_0^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z)\,dz + \int_0^{c\eta^2} f(z)\,dz\Big\}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{(ac-b^2)}}\Big\{\int_{a\xi^2}^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z)\arcsin\frac{\xi\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(cz)}}\,dz$$

$$+\int_{c\eta^2}^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z)\arcsin\frac{\eta\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(az)}}\,dz\Big\}.$$

Obgleich bei Herleitung dieser Formeln einige Annahmen gemacht wurden, so gelten sie dennoch allgemein; wie man sich leicht direct überzeugen kann.

Es sei in der letztern Formel $\xi=\infty$, so hat man

$$\int_0^\infty dx\int_0^\eta f(ax^2+2bxy+cy^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(ac-b^2)}}\Big\{\arccos\frac{b}{\sqrt{(ac)}}\int_0^{c\eta^2} f(z)\,dz + \int_{c\eta^2}^\infty f(z)\arcsin\frac{\eta\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(az)}}\cdot dz\Big\}.$$

Ist hier auch noch $\eta=\infty$, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(ax^2+2bxy+cy^2)\,dy = \frac{\arccos\frac{b}{\sqrt{(ac)}}}{2\sqrt{(ac-b^2)}}\int_0^\infty f(z)\,dz.$$

Für $b = Q$ erhält man hieraus die bekannte Formel

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax^2 + cy^2)\, dy = \frac{\pi}{4\sqrt{(ac)}} \int_0^\infty f(z)\, dz.$$

Setzt man $f(z) = e^{-z}$ so wird

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\, dy = \frac{\arccos \frac{b}{\sqrt{(ac)}}}{2\sqrt{(ac-b^2)}},$$

woraus für $b = 0$, $c = a$ die schon in (§. 9.) enthaltene Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ folgt.}$$

23.

B. Es sei

$$ac - b^2 < 0.$$

In diesem Falle sind die Curven in der xy Ebene ***Hyperbeln,*** und da

$$z = \frac{(ax+by)^2 - (b^2-ac)y^2}{a}$$

ist, so sieht man, dafs die Fläche, deren Ordinate z ist, die xy Ebene schneidet, und zwar nach zwei geraden Linien, welche durch die Gleichung

$$ax + (b \pm \sqrt{(b^2-ac)})y = 0$$

gegeben sind. In Folge der Annahme, dafs a, b, c positiv seien, geht keine dieser Geraden zwischen den beiden positiven Halb-Axen hindurch. Diese geraden Linien sind die Asymptoten aller Hyperbeln, deren Mittelpunct im Ursprung der Coordinaten liegt und deren Axen der Richtung nach zusammenfallen. Diese Hyperbeln füllen den ganzen Raum der xy Ebene aus. Die krumme Fläche entfernt sich für wachsende Werthe von x und y stets mehr von der xy Ebene. Dies vorausgetzt, ist nun

$$ds = \frac{dz}{2\sqrt{(b^2-ac)}} \left\{ \log \frac{x\sqrt{(b^2-ac)} + \sqrt{(cz + x^2(b^2-ac))}}{\sqrt{(cz)}} + \text{Const.} \right\}.$$

Die Grenzen, zwischen welchen dieser Ausdruck nach x und später nach z zu nehmen ist, sind dieselben wie im vorigen Falle. Es ist also

$$\int_0^\xi bx \int_0^{\chi(x)} f(ax^2 + 2bxy + cy^2)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(b^2-ac)}} \tfrac{1}{2} \log \left\{ \frac{b + \sqrt{(b^2-ac)}}{b - \sqrt{(b^2-ac)}} \int_0^{a\xi^2} f(z)\, dz \right.$$

$$\left. + \int_{a\xi^2}^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z) \log \frac{\xi\sqrt{(b^2-ac)} + \sqrt{(cz + \xi^2(b^2-ac))}}{\sqrt{(cz)}}\, dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(b^2-ac)}} \int_{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2}^{c\chi(0)^2} f(z) \log \frac{\psi(z)\sqrt{(b^2-ac)} + \sqrt{(cz + \psi(z)^2(b^2-ac))}}{\sqrt{(cz)}}\, dz.$$

Ist $\chi(x) = \eta$ constant, also

$$\psi(z) = \frac{-b\eta + \sqrt{(az + \eta^2(b^2 - ac))}}{a},$$

so braucht man nur zu erwägen, dafs

$$\sqrt{(cz + x^2(b^2 - ac))} = bx + cy$$

ist, und hierin $\psi(z)$ statt x und η statt y zu setzen, um folgende symmetrische Formel zu erhalten:

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f(ax^2 + 2bxy + cy^2)\,dy$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{(b^2 - ac)}} \log \frac{b + \sqrt{(b^2 - ac)}}{b - \sqrt{(b^2 - ac)}} \left\{ \int_0^{a\xi^2} f(z)\,dz - \int_0^{a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2} f(z)\,dz + \int_0^{c\eta^2} f(z)\,dz \right\}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(b^2 - ac)}} \left\{ \int_{a\xi^2}^{a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2} f(z) \log \frac{\xi\sqrt{(b^2 - ac)} + \sqrt{(cz + \xi^2(b^2 - ac))}}{\sqrt{(cz)}}\,dz \right.$$
$$\left. + \int_{c\eta^2}^{a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2} f(z) \log \frac{\eta\sqrt{(b^2 - ac)} + \sqrt{(az + \eta^2(b^2 - ac))}}{\sqrt{(az)}}\,dz \right\}.$$

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dafs man diese Formeln auch aus denen des vorigen Paragraphs hätte ableiten können, wenn man sich der bekannten Relation zwischen Logarithmen und Bogen bedient hätte.

Setzt man $\xi = \infty$, so erhält man

$$\int_0^\infty dx \int_0^\eta f(ax^2 + 2bxy + cy^2)\,dy$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{(b^2 - ac)}} \log \frac{b + \sqrt{(b^2 - ac)}}{b - \sqrt{(b^2 - ac)}} \int_0^{c\eta^2} f(z)\,dz$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(b^2 - ac)}} \int_{c\eta^2}^\infty f(z) \log \frac{\eta\sqrt{(b^2 - ac)} + \sqrt{(az + \eta^2(b^2 - ac))}}{\sqrt{(az)}}\,dz.$$

Ist endlich auch noch $\eta = \infty$, so findet sich

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax^2 + 2bxy + cy^2)\,dy = \frac{1}{4\sqrt{(b^2 - ac)}} \log \frac{b + \sqrt{(b^2 - ac)}}{b - \sqrt{(b^2 - ac)}} \int_0^\infty f(z)\,dz.$$

Bei diesen beiden Formeln sind a und c positiv angenommen.

Für $a = c = 0$ werden alle Resultate unbrauchbar; indessen ist die directe Herleitung in diesem Falle sehr leicht. Bezeichnet $\psi(z)$ die einzige zwischen 0 und ξ vorkommende reelle Wurzel der Gleichung

$$x\chi(x) - z = 0,$$

so ist

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f(xy)\,dy = \int_0^{\xi\eta} f(z) \log \frac{\xi}{\psi(z)} \cdot dz,$$

und wenn $\chi(x) = \eta$ constant ist:

$$\int_0^\xi dz \int_0^\eta f(xy)dy = \int_0^{\xi\eta} f(z)\log\frac{\xi\eta}{z}\cdot dz.$$

24.

Das Argument sei nun eine *gebrochene Function* zweiten Grades zwischen x und y; und zwar wollen wir, in voller Allgemeinheit,

$$z = \frac{ax^2+2bxy+cy^2+2mx+2ny+l}{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\mu x+2\nu y+\lambda}$$

annehmen, jedoch wegen der grofsen Weitläuftigkeit der Endresultate auf die Nachweisung uns beschränken, wie die Reduction des entsprechenden Doppel-Integrals geschieht.

Um über die Gestalt der Fläche (Fig. 5.), deren Ordinate z ist, Aufschlufs zu erhalten, ist vor Allem zu bemerken, dafs die Curven in der xy Ebene, über welchen z constant bleibt, die in der Gleichung

$$(1.)\quad (\alpha z-a)x^2+2(\beta z-b)xy+(\gamma z-c)y^2+2(\mu z-m)x+2(\nu z-n)y+\lambda z-l = 0$$

enthaltenen *Kegelschnittslinien* sind. Der Verlauf, welchen dieselben für die auf einander folgenden Werthe von z nehmen, ist bemerkenswerth und ergiebt sich aus den folgenden Betrachtungen. Man sieht bald, dafs mehrere gerade Linien existiren, welche, mit der xy Ebene parallel, ganz in der krummen Fläche liegen. Die Werthe von z, welche diesen Linien entsprechen, sind die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$(2.)\quad (\alpha z-a)(\nu z-n)^2-2(\beta z-b)(\mu z-m)(\nu z-n)+(\gamma z-c)(\mu z-m)^2 \\ +(\lambda z-l)\{(\beta z-b)^2-(\alpha z-a)(\gamma z-c)\} = 0.$$

Für jeden dieser Werthe finden zwei *gerade Linien* Statt, deren Projectionen die Gleichung

$$y = Ax+B$$

angehört, wo A und B aus den Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases}(\gamma z-c)A^2+2(\beta z-b)A+\alpha z-a = 0,\\ (\gamma z-c)B^2+2(\nu z-n)B+\lambda z-l = 0\end{cases}$$

abzuleiten sind.

Da nun im Allgemeinen drei Wurzelwerthe von z Statt finden, so giebt es im Ganzen *sechs gerade Linien* von der gedachten Art. Die Coordinaten der Puncte, in welchen sich je zwei dieser demselben z entsprechende Geraden schneiden, lassen sich aus den angeführten Gleichungen finden. Sie

entsprechen zugleich den Puncten der krummen Fläche, für welche

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

ist. Auch lassen sich die Puncte bestimmen, in welchen sich die Projectionen der geraden Linien (in der xy Ebene) schneiden, welche zu den drei verschiedenen Wurzelwerthen von z gehören. Diese Puncte sind zugleich diejenigen, für welche z wesentlich unbestimmt wird und für welche also

$$(4.) \quad \begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2mx + 2ny + l = 0, \\ \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\mu x + 2\nu y + \lambda = 0 \end{cases}$$

ist. Eliminirt man aus diesen Gleichungen eine der Coordinaten, so erhält man für die andere eine Gleichung vom vierten Grade; so dafs also im Allgemeinen die Ordinate z *viermal* unbestimmt wird.

Dafs sich die sechs Geraden in den vier Puncten schneiden, deren Coordinaten die Gleichungen (4.) geben, ergiebt sich einfach daraus, dafs man in der That wieder auf die Gleichung (2.) zurückkommt, wenn man die Bedingungen sucht, welche erfüllt werden müssen, damit eine gerade Linie irgend zwei jener vier Puncte enthalte.

Hieraus folgt, *dafs die Projectionen der sechs Geraden in der xy Ebene ein Viereck mit seinen zwei Diagonalen bilden und dafs durch die Eckpuncte desselben vier mit der z Axe parallele Geraden gehen, welche ganz in der Fläche liegen.* Solcher Linien sind also im Ganzen *zehn* zu bemerken.

Die zu derselben Wurzel z gehörigen Paare gerader Linien sollen durch (1, 1), (2, 2), (3, 3) und ihre resp. Durchschnittspuncte mit I, II, III bezeichnet werden.

25.

Die Projectionen der Curven (Fig. 5.), über welcher die Ordinate z constant bleibt und welche man aus den mit der xy Ebene parallelen Schnitten der krummen Fläche erhält, müssen, da z in den oben bezeichneten vier Puncten unbestimmt wird, insgesammt durch diese Puncte gehen.

Von *Ellipsen* in *gerade Linien* und *Hyperbeln* nach und nach übergehend, stellen sie die Gesammtheit aller Kegelschnittslinien dar, welche durch vier gegebene Puncte gelegt werden können und welche durch die Gleichung (1.) bestimmt werden. Da ferner z für alle reellen Werthe von x und y reell bleibt, so füllen jene Curven den ganzen Raum der xy Ebene aus.

So wie es häufig nicht leicht ist, den Lauf einer Curve aus ihrer Gleichung zu erkennen, so bietet die allgemeine Curvenlehre noch weniger Anhaltspuncte für die Veranschaulichung des successiven Verlaufs, der Gestaltsveränderung etc. unendlich vieler Curven dar, welche aus der Veränderlichkeit eines Parameters hervorgehen. Für den vorliegenden Zweck scheint das sicherste Mittel zu sein, dafs man, wie bisher geschahe, diesen Parameter als die Ordinate einer krummen Fläche betrachtet, darauf, was nicht selten leicht ist, sich von deren Gestalt eine Vorstellung verschafft und dann von jener Fläche auf die gesuchten Curven zurückschliefst.

Dadurch findet man für das obige Beispiel, dafs sich von zwei Seiten her den Puncten I, II, III die Scheitel zweier *Hyperbel-Äste* nähern, deren Asymptotenwinkel stets wächst und am gröfsten ist, wenn die Hyperbeln in die Geraden (1, 1), (2, 2), (3, 3) übergegangen sind, und dafs von den Hyperbeln, deren Scheitel sich dem Puncte III nähern, jeder Ast durch zwei der vier Puncte geht, während von den Hyperbeln, deren Scheitel sich den Puncten I und II nähern, je ein Ast durch alle vier, der andere durch keinen jener Puncte geht. Auch zeigt sich, dafs der Scheitel dieses letztern Astes vom Puncte I oder II aus in's Unendliche fortrückt, während jener des zweiten Astes nur eine kleine Bewegung macht. Wenn der Scheitel des erstern im Unendlichen liegt, so geht die Curve in eine *Ellipse* über, welche dann einen weitern Theil des divergirenden Raumes (1, 1) oder (2, 2) ausfüllt. Eine weitere Untersuchung der Fläche dritter Ordnung gehört nicht hierher.

Wie hier das Doppel-Integral dargestellt werden könne, will ich nur kurz andeuten. Stellt man $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ auf, so ergiebt sich für ds ein Ausdruck in Bogen oder Logarithmen, dessen Weitläuftigkeit seine Mittheilung hier nicht gestattet.

Die Grenzen der Integrationen nach x und z findet man ähnlich wie in den vorigen Fällen. Nur wenn der Punct, für welchen z unbestimmt wird, in den Raum der Curve $y = \chi(x)$ fällt, ist eine besondere Aufmerksamkeit nöthig.

Die Möglichkeit der Reduction des Doppel-Integrals, so wie die Art, wie sie geschieht, ist somit nachgewiesen und also die Eingangs gestellte Aufgabe gelöset.

26.

Wir beschränken die Anwendung der obigen Bemerkungen auf folgenden speciellen Fall.

Es sei

$$z = \frac{ax^2+by^2+c}{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma}.$$

Die Fläche, deren Ordinate z ist, giebt, parallel mit der xy Ebene geschnitten, die durch die Gleichung

$$(\alpha z-a)x^2+(\beta z-b)y^2+\gamma z-c = 0$$

ausgedrückte Curve. Die Gleichungen (4.) sind hier

$$ax^2+by^2+c = 0, \qquad \alpha x^2+\beta y^2+\gamma = 0.$$

Ihre Wurzeln sind

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}}, \qquad y_0 = \pm\sqrt{\frac{a\gamma-\alpha c}{b\alpha-\beta a}};$$

wo die Zeichen nicht correspondiren.

Sind diese Wurzeln reell, so finden vier Puncte Statt, in welchen z unbestimmt wird und welche, symmetrisch um den Anfangspunct liegend, die Eckpuncte eines Rechtecks bilden.

Die cubische Gleichung (2.) giebt hier

$$(\alpha z-a)(\beta z-b)(\gamma z-c) = 0$$

und es können also sechs, den reellen Wurzeln

$$\frac{a}{\alpha}, \quad \frac{b}{\beta}, \quad \frac{c}{\gamma}$$

entsprechende gerade Linien auf der Fläche Statt finden.

Die Gleichungen (3.) der Projectionen dieser Geraden gehen in

$$y\sqrt{(\beta z-b)}\pm x\sqrt{(-(\alpha z-a))}\mp\sqrt{(-(\gamma z-c))} = 0$$

über und verwandeln sich

$$\text{für } z=\frac{a}{\alpha} \text{ in } y=\pm\sqrt{\frac{a\gamma-\alpha c}{b\alpha-\beta c}},$$

$$\text{für } z=\frac{b}{\beta} \text{ in } y=\pm\sqrt{\frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}},$$

$$\text{für } z=\frac{c}{\gamma} \text{ in } y=\pm x\sqrt{-\frac{a\gamma-\alpha c}{a\beta-\alpha b}}.$$

Sind die Wurzelgröfsen insgesammt reell, so giebt es, wie im früher bemerkten allgemeinsten Falle, *sechs* gerade Linien, welche durch die vier Puncte gehen, deren Coordinaten x_0, y_0 sind und welche ein *Rechteck* mit seinen beiden Diagonalen bilden.

Nun können aber von jenen Wurzeln einige imaginär sein, und es sind zur Unterscheidung der hierbei möglichen Fälle die folgenden Zeichenverbindungen zu berücksichtigen:

$\frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}$,	$\frac{a\gamma-\alpha c}{b\alpha-\beta a}$,	$-\frac{a\gamma-\alpha c}{b\gamma-\beta c}$.
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

Andere Fälle giebt es nicht.

Im ersten Fall finden *sechs* gerade Linien Statt;

Im zweiten Fall *nur zwei* gerade Linien, parallel mit der x Axe;

Im dritten Fall nur zwei gerade Linien, parallel mit der y Axe;

Im vierten Fall nur zwei gerade Linien, welche sich im Anfangspuncte schneiden und gleiche Winkel mit den Axen einschliefsen.

Der zweite und dritte Fall folgen auseinander, wenn man die Axen miteinander vertauscht. Der Verlauf der Curven läfst sich aus den früheren Andeutungen sogleich erkennen. Hinsichtlich der Zusammensetzung des Doppel-Integrals ist zu bemerken, dafs man aus der Unterscheidung, ob der Streifen ds von zwei ***Ellipsen***- oder von zwei ***Hyperbel-Bogen*** begrenzt wird, für $\frac{ds}{dz}$ beziehungsweise die Ausdrücke

$$\frac{(a\beta-\alpha b)\sqrt{(-(\alpha z-a)x^2-(\gamma z-c))}}{4(\alpha z-a)(\beta z-b)^{\frac{3}{2}}}x$$
$$+\frac{((a\beta+\alpha b)\gamma-2a\beta c)z+(a\beta+\alpha b)c-2ab\gamma}{4(\alpha z-a)^{\frac{1}{2}}(\beta z-b)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x\sqrt{\left(-\frac{\alpha z-a}{\gamma z-c}\right)}+\text{Const.},$$

$$\frac{(a\beta-\alpha b)\sqrt{(-(\alpha z-a)x^2-\gamma z-c)}}{4(\alpha z-a)(\beta z-b)^{\frac{3}{2}}}x$$
$$+\frac{((a\beta+\alpha b)\gamma-2a\beta c)z+(a\beta+\alpha b)c-2ab\gamma}{8(-(\alpha z-a))^{\frac{3}{2}}(\beta z-b)^{\frac{3}{2}}}\log\left(x+\sqrt{\left(x^2+\frac{\gamma z-c}{\alpha z-a}\right)}\right)^2+\text{Const.}$$

erhält. Will man das Imaginäre vermeiden, so mufs man das Integral mit Rücksicht auf die oben unterschiedenen Fälle zusammensetzen. Nach den bisherigen Ausführungen hat sowohl Dies, als die Ermittelung der einzelnen Grenzenpaare keine Schwierigkeit.

Wenn die Curve $y=\chi(x)$, analog wie es in (§. 20.) der Fall war, mit einer der Curven in der xy Ebene für einen besondern Werth von z

zusammenfällt, so mufs die Gleichung $x = \psi(z)$ eine unbestimmte Form annehmen. Jene Curve sei durch die Gleichung

$$y = \frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

gegeben. Zur Bestimmung von $\psi(z)$ hat man dann:

$$0 = \{(\alpha z - a)A^2 - (\beta z - b)B^2\}x^2 + (\beta z - b)A^2B^2 + (\gamma z - c)B^2.$$

Diese Gleichung findet identisch Statt, wenn

$$z = \frac{aA^2 - bB^2}{\alpha A^2 - \beta B^2} = \frac{bB^2 + c}{\beta B^2 + \gamma},$$

oder wenn

$$(a\gamma - \alpha c)A^2 + (c\beta - \gamma b)B^2 = (b\alpha - \beta a)A^2B^2,$$

oder endlich, wenn

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{y_0^2}{B^2} = 1$$

ist. Angenommen die Coëfficienten erfüllen diese Gleichung, so zerfällt das Doppel-Integral in zwei Theile, für welche sich x

$$\text{von } 0 \text{ bis } \sqrt{\frac{\gamma z - c}{\alpha z - a}},$$
$$\text{von } 0 \text{ bis } \xi$$

erstreckt. Wenn man die beiden für ds sich ergebenden Ausdrücke mit $f(z)$ multiplicirt und dann beziehlich

$$\text{von } \frac{c}{\gamma} \text{ bis } \frac{a\xi^2 + c}{\alpha\xi^2 + \gamma},$$
$$\text{oder von } \frac{a\xi^2 + c}{\alpha\xi^2 + \gamma} \text{ bis } \frac{bB^2 + c}{\beta B^2 + \gamma}$$

integrirt, so erhält man

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\frac{B}{A}\sqrt{(A^2 - x^2)}} f\left(\frac{ax^2 + by^2 + c}{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma}\right) dy$$

$$= \tfrac{1}{8}\pi \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi^2 + c}{\alpha\xi^2 + \gamma}} \frac{\{(a\beta + \alpha b)\gamma - 2\alpha\beta c\}z + (a\beta + \alpha b)c - 2ab\gamma}{(\alpha z - a)^{\frac{3}{2}}(\beta z - b)^{\frac{3}{2}}} f(z)\, dz$$

$$+ \int_{\frac{a\xi^2 + c}{\alpha\xi^2 + \gamma}}^{\frac{bB^2 + c}{\beta B^2 + \gamma}} \Big\{ \frac{(a\beta - \alpha b)\sqrt{(-(\alpha z - a)\xi^2 - (\gamma z - c))}}{4(\alpha z - a)(\beta z - b)^{\frac{3}{2}}} . x$$

$$+ \frac{\{(a\beta + \alpha b)\gamma - 2\alpha\beta c\}z + (a\beta + \alpha b)c - 2ab\gamma}{4(\alpha z - a)^{\frac{3}{2}}(\beta z - b)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \xi \sqrt{\left(-\frac{\alpha z - a}{\gamma z - c}\right)} \Big\} f(z)\, dz.$$

Man nehme beispielsweise an, es handle sich um die *Complanation des Ellipsoids*, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2} = 1$$

ist, so hat bekanntlich ein Theil seiner Oberfläche

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\frac{B}{A}\sqrt{(A^2-x^2)}} dy \sqrt{\frac{\frac{A^2-C^2}{A^4}x^2+\frac{B^2-C^2}{B^4}y^2-1}{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1}}$$

zum Ausdruck. Die frühere Bedingungsgleichung für die Coëfficienten wird hier offenbar erfüllt. Auch ist

$$(a\beta+\alpha b)\gamma-2\alpha\beta c = \frac{(A^2+B^2)C^2}{A^4B^4},$$

$$(a\beta+\alpha b)c-2ab\gamma = \frac{(2C^2-A^2-B^2)C^2}{A^4B^4},$$

$$a\beta-\alpha b = \frac{(A^2-B^2)C^2}{A^4B^4}.$$

Die Ausführung der Rechnung, bei welcher ξ noch unbestimmt bleibt, werde weggelassen und das Beispiel nur unter der Annahme

$$\xi = A$$

vollendet, wo man dann den achten Theil der Oberfläche erhält. Vorausgesetzt, dafs

$$A > B > C$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{a\xi^2+c}{\alpha\xi^2+\gamma} = 1+\frac{C^2\xi^2}{A^2(A^2-\xi^2)} = +\infty,$$

$$\frac{bB^2+c}{\beta B^2+\gamma} = +\infty.$$

Der letzte Theil der allgemeinen Formel fällt also weg, und die Grenzen des ersteren sind 1 und ∞. Der gedachte Inhalt ist mithin

$$= \tfrac{1}{8}\pi\cdot\frac{(A^2+B^2)C^2}{AB}\int_1^{\infty}\frac{\left(z-\frac{A^2+B^2-2C^2}{A^2+B^2}\right)\sqrt{z}}{\left(z-\frac{A^2-C^2}{A^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(z-\frac{B^2-C^2}{B^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot dz.$$

Dieses Integral läfst sich in zwei andere zerlegen, welche auf die Form *elliptischer Integrale* von der ersten und zweiten Gattung gebracht werden können. Setzt man nämlich $z = t^2$ und zur Abkürzung $\frac{A^2-C^2}{A^2} = k^2$, $\frac{B^2-C^2}{B^2} = l^2$,

multiplicirt den obigen Ausdruck mit 8, um die Oberfläche des ganzen Ellipsoids zu finden, und erwägt, dafs

$$\frac{(A^2+B^2)C^2}{AB}\left(z\;\frac{A^2+B^2-2C^2}{A^2+B^2}\right) = AB\{(1-k^2)(t^2-l^2)+(1-l^2)(t^2-k^2)\}$$

ist, so nimmt der Ausdruck die bekannte Form an; nämlich

$$2\pi AB\int_1^{\infty}\frac{t^2dt}{\sqrt{((t^2-k^2)(t^2-l^2))}}\left(\frac{1-k^2}{t^2-k^2}+\frac{1-l^2}{t^2-l^2}\right).$$

27.

Bis hierher konnte das Argument der Function successive eine allgemeinere Form haben und die Reduction jedesmal vollständig ausgeführt werden. Mit der allgemeinen Form einer rationalen Function zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen hört Dies (einige besondere Fälle ausgenommen) insofern auf, als sich *ds* nicht mehr in geschlossener Form ausdrücken läfst. Das Verfahren zur Bestimmung der Grenzen erleidet jedoch keine Änderung. Die Lösung der Aufgabe hält also gewissermafsen gleichen Schritt mit der endlichen Darstellung der einfachen unbestimmten Integrale, welche sich auf Ausdrücke von den auf einander folgenden Graden beziehen. Analog wie bei diesen, lassen sich beliebig viele Fälle bezeichnen, in welchen die Reduction des Doppel-Integrals vollständig ausgeführt werden kann. Einige einfachere Fälle dieser Art mögen erörtert werden.

28.

Es sei

$$z = \frac{(ay+b)^m}{(\alpha x+\beta)^n},$$

so ist

$$ds = \frac{z^{\frac{1}{m}-1}dz}{(m+n)\alpha a}\left((\alpha x+\beta)^{\frac{n}{m}+1}+\text{Const.}\right).$$

Die Fläche, deren Ordinate z ist, schneidet die xy Ebene längs einer mit der x Axe parallelen geraden Linie. Ferner wird z über allen Puncten einer mit der y Axe parallelen Geraden unendlich grofs. Für $x_0 = -\frac{\beta}{\alpha}$ und $y_0 = -\frac{b}{a}$ wird z wesentlich unbestimmt, und es gehört also die durch diesen Punct gehende, mit der z Axe parallele gerade Linie mit allen ihren Puncten zur Fläche. Die Curven, über welchen z unveränderlich bleibt, sind, je nachdem $\frac{m}{n}$ positiv oder negativ ist, *höhere Parabeln* oder *Hyperbeln*, gehen insgesammt durch den Punct (x_0y_0) und reduciren sich zweimal auf gerade

Linien, welche mit den Axen der x und y parallel sind. Sind m und n ganze Zahlen, so breiten sich diese Curven über die ganze xy Ebene aus.

Die Grenzen, zwischen welchen dx zu nehmen ist, erstrecken sich

$$\text{von } \frac{b^{\frac{m}{n}} - \beta z^{\frac{1}{n}}}{\alpha z^{\frac{1}{n}}} \text{ bis } \xi,$$

$$\text{von } \frac{b^{\frac{m}{n}} - \beta z^{\frac{1}{n}}}{\alpha z^{\frac{1}{n}}} \text{ bis } \psi(z),$$

$$\text{von } 0 \text{ bis } \psi(z);$$

wo $\psi(z)$ die Wurzel der Gleichung

$$(a\chi(x)+b)^m - z(\alpha x+\beta)^n = 0 \text{ ist.}$$

Multiplicirt man die sich ergebenden Werthe von dx mit $f(z)$ und integrirt sie hierauf, beziehlich

$$\text{von } \frac{b^m}{(\alpha\xi+\beta)^n} \text{ bis } \frac{(a\eta+b)^m}{(\alpha\xi+\beta)^n},$$

$$\text{von } \frac{(a\eta+b)^m}{(\alpha\xi+\beta)^n} \text{ bis } \frac{b^m}{\beta^n},$$

$$\text{von } \frac{b^m}{\beta^n} \text{ bis } \frac{(a\chi(0)+b)^m}{\beta^n},$$

so findet sich folgende Gleichung:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{(ay+b)^m}{(\alpha x+\beta)^n}\right) dy$$

$$= \frac{1}{(m+n)a\alpha} \int_{\frac{b^m}{(\alpha\xi+\beta)^n}}^{\frac{(a\eta+b)^m}{(\alpha\xi+\beta)^n}} f(z)\left((\alpha\xi+\beta)^{\frac{n}{m}+1} z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} - b^{\frac{m}{n}+1}\right) \frac{dz}{z^{\frac{1}{n}+1}}$$

$$+ \frac{1}{(m+n)a\alpha} \left\{ \int_{\frac{(a\eta+b)^m}{(\alpha\xi+\beta)^n}}^{\frac{b^m}{\beta^n}} f(z)\left((\alpha\psi(z)+\beta)^{\frac{n}{m}+1} . z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} - b^{\frac{m}{n}+1}\right) \frac{dz}{z^{\frac{1}{n}+1}} \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{b^m}{\beta^n}}^{\frac{(a\chi(0)+b)^m}{\beta^n}} f(z)\left((\alpha\psi(z)+\beta)^{\frac{n}{m}+1} - \beta^{\frac{n}{m}+1}\right) z^{\frac{1}{m}-1} dz \right\}$$

Ist hier $\chi(x) = \eta$ constant, so findet man nach einigen Umformungen :

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(\frac{(ay+b)^m}{(\alpha x+\beta)^n}\right) dy$$

$$= \frac{1}{(m+n)a\alpha}\left\{(\alpha\xi+\beta)^{\frac{n}{m}+1}\int_{\frac{b^m}{(\alpha\xi+\beta)^n}}^{\frac{(a\eta+b)^m}{(\alpha\xi+\beta)^n}} z^{\frac{1}{m}-1} f(z)\,dz + (a\eta+b)^{\frac{m}{n}+1}\int_{\frac{\beta^n}{(a\eta+b)^m}}^{\frac{(\alpha\xi+\beta)^n}{(a\eta+b)^m}} z^{\frac{1}{n}-1}\left(\frac{1}{z}\right)dz\right\}$$

$$-\frac{1}{(m+n)a\alpha}\left\{\beta^{\frac{n}{m}+1}\int_{\frac{b^m}{\beta^n}}^{\frac{(a\eta+b)^m}{\beta^n}} z^{\frac{1}{m}-1} f(z)\,dz + b^{\frac{m}{n}+1}\int_{\frac{\beta^n}{b^m}}^{\frac{(\alpha\xi+\beta)^n}{b^m}} z^{\frac{1}{n}-1} f\left(\frac{1}{z}\right)dz\right\}.$$

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dafs, mit Zulassung des Imaginären, diese Gleichungen für alle Werthe von m und n gelten. Nur für $m = -n$ werden sie unbrauchbar. In diesem Falle aber lassen sich die betreffenden Resultate aus (§. 23.) ableiten.

Die gefundenen Formeln werden beträchtlich einfacher, wenn man b und dann auch β Null werden läfst. Setzt man aufserdem $a = \alpha = 1$, so ergiebt sich

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{y^m}{x^n}\right) dy$$

$$= \frac{1}{m+n}\left\{\xi^{\frac{n}{m}+1}\int_0^{\frac{\eta^m}{\xi^n}} z^{\frac{1}{m}-1} f(z)\,dz + \int_{\frac{\eta^m}{\xi^n}}^{\infty} z^{\frac{1}{m}+1}\,\psi(z)^{\frac{n}{m}+1} f(z)\,dz\right\},$$

wo m und n positiv vorausgesetzt sind und $\psi(z)$ die Wurzel der Gleichung

$$z x^n - \chi(x)^m = 0$$

ist. Ist $\chi(x) = \eta$ constant, so folgt

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(\frac{y^m}{x^n}\right) dx$$

$$= \frac{1}{m+n}\left\{\xi^{\frac{n}{m}+1}\int_0^{\frac{\eta^m}{\xi^n}} z^{\frac{1}{m}-1} f(z)\,dz + \eta^{\frac{m}{n}+1}\int_0^{\frac{\xi^n}{\eta^m}} z^{\frac{1}{n}-1} f\left(\frac{1}{z}\right)dz\right\}.$$

Wie diese Resultate auf einzelne Fälle, z. B. auf die Function

$$\frac{(ax^{2nq}+2bx^{nq}y^{mq}+cy^{2mq})^p}{(\alpha x^{2np}+2\beta x^{np}y^{mp}+\gamma y^{2mp})^q},$$

anzuwenden sind, bedarf keiner besondern Auseinandersetzung.

Wir wollen nur noch bemerken, dafs sich, wenn b und $\beta = 0$, a und $\alpha = 1$ sind, n negativ ist und $-n$ statt n gesetzt wird, die Formeln

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f(x^n y^m)\,dy = \frac{1}{m-n}\int_0^{\xi^n\eta^m} z^{\frac{1}{m}-1}\left(z^{1-\frac{n}{m}} - \psi(z)^{1-\frac{n}{m}}\right) f(z)\,dz$$

ergeben, wo $\psi(z)$ die Wurzel der Gleichung

$$x^n\chi(x)^m - z = 0 \text{ ist.}$$

Wenn $\chi(x) = \eta$ constant ist, so findet sich

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f(x^n y^m)\,dy = \int_0^{\xi^n\eta^m} \left\{\frac{\xi^{1-\frac{n}{m}} z^{\frac{1}{m}}}{m-n} + \frac{\eta^{1-\frac{m}{n}} z^{\frac{1}{n}}}{n-m}\right\} f(z)\frac{dz}{z}.$$

Für $m = n$ ist das oben schon Bemerkte zu berücksichtigen.

29.

Es sei weiter der Ausdruck

$$z = ax^{\frac{1}{m}} + by^{\frac{1}{n}}$$

gegeben. Demselben entspricht das Element

$$ds = \frac{n\,dz}{b^n}\left(\int \left(z - ax^{\frac{1}{m}}\right)^{n-1} dx + \text{Const.}\right),$$

oder, wenn man eine neue Veränderliche t, welche durch die Gleichung

$$x = \frac{z^m}{a^m}(1-t)^m$$

bestimmt wird, einführt:

$$ds = -mn\cdot\frac{z^{m+n-1}}{a^m b^n}\,dz\left(\int t^{n-1}(1-t)^{m-1}dt + \text{Const.}\right).$$

Dieses Integral läfst sich, wie bekannt, unbestimmt finden, wenn entweder

$$m, \quad \text{oder} \quad m+n, \quad \text{oder} \quad n$$

eine ganze Zahl ist

Um die Grenzen der Integrale zu bestimmen, aus welchen das Doppel-Integral zusammengesetzt ist, mufs man unterscheiden, ob m und n gleiche oder verschiedene Zeichen haben. Man nehme zuerst an, *es seien m und n positiv* und bezeichne wieder durch $\psi(z)$ den einzigen reellen, zwischen 0 und ξ vorkommenden Werth von x, welcher der Gleichung

$$ax^{\frac{1}{m}} + b\chi(x)^{\frac{1}{n}} - z = 0$$

Genüge leistet, so sind die Grenzen der Integration nach x,

von 0 bis $\left(\frac{z}{a}\right)^m$,

von 0 bis ξ,

von 0 bis $\psi(z)$,

also die entsprechenden nach t,

von 1 bis 0,

von 1 bis $1-\frac{a}{z}\xi^{\frac{1}{m}}$,

von 1 bis $1-\frac{a}{z}\psi(z)^{\frac{1}{m}}$;

ferner die Grenzen der darauf folgenden Integration nach z,

von 0 bis $a\xi^{\frac{1}{m}}$,

von $a\xi^{\frac{1}{m}}$ bis $a\xi^{\frac{1}{m}}+a\eta^{\frac{1}{n}}$,

von $a\xi^{\frac{1}{m}}+b\eta^{\frac{1}{n}}$ bis $b\chi(0)^{\frac{1}{n}}$

auszudehnen; wie sich Dies ohne Mühe finden läfst. Es ist also

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f\left(ax^{\frac{1}{m}}+by^{\frac{1}{n}}\right) dy$$

$$= \frac{mn}{a^m b^n} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{a\xi^{\frac{1}{m}}} z^{m+n-1} f(z)\, dz$$

$$+ \frac{mn}{a^m b^n} \left\{ \int_{a\xi^{\frac{1}{m}}}^{a\xi^{\frac{1}{m}}+b\eta^{\frac{1}{n}}} z^{m+n-1} f(z)\, dz \int_{1-\frac{a}{z}\xi^{\frac{1}{m}}}^{1} t^{n-1}(1-t)^{m-1}\, dt \right.$$

$$\left. + \int_{a\xi^{\frac{1}{m}}+b\eta^{\frac{1}{n}}}^{b\chi(0)^{\frac{1}{n}}} z^{m+n-1} f(z)\, dz \int_{1-\frac{a}{z}\psi(z)^{\frac{1}{m}}}^{1} t^{n-1}(1-t)^{m-1}\, dt \right\}.$$

Ist die Grenze $\chi(x)$ constant und $=\eta$, und führt man unter dieser Annahme die Umformungen der Gleichung durch, welche ihr eine symmetrische Form geben, so erhält man

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(ax^{\frac{1}{m}}+by^{\frac{1}{n}}\right)dy =$$

$$\frac{mn}{a^m b^n}\cdot\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\left\{\int_0^{a\xi^{\frac{1}{m}}} z^{m+n-1}f(z)\,dz - \int_0^{a\xi^{\frac{1}{m}}+b\eta^{\frac{1}{n}}} z^{m+n-1}f(z)\,dz + \int_0^{b\eta^{\frac{1}{n}}} z^{m+n-1}f(z)\,dz\right\}$$

$$+\frac{mn}{a^m b^n}\left\{\int_{a\xi^{\frac{1}{m}}}^{a\xi^{\frac{1}{m}}+b\eta^{\frac{1}{n}}} z^{m+n-1}f(z)\,dz\int_{1-\frac{a}{z}\xi^{\frac{1}{m}}}^{1} t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{b\eta^{\frac{1}{n}}}^{a\xi^{\frac{1}{m}}+b\eta^{\frac{1}{n}}} z^{m+n-1}f(z)\,dz\int_{1-\frac{b}{z}\eta^{\frac{1}{n}}}^{1} t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt\right\}.$$

Mit bekannten Resultaten übereinstimmend findet man hieraus, wenn a und b positiv sind:

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty f\left(ax^{\frac{1}{m}}+by^{\frac{1}{n}}\right)dy = \frac{mn}{a^m b^n}\cdot\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^\infty z^{m+n-1}f(z)\,dz.$$

30.

Für den Fall, dafs einer der Exponenten in der obigen Form des Arguments negativ ist, wollen wir beispielsweise

$$z = \frac{x^n}{a}+\frac{b}{y^n}$$

setzen und n positiv annehmen.

Die Fläche, welcher diese Gleichung angehört, giebt, parallel mit z und der yz Ebene geschnitten, ***höhere Parabeln*** und ***Hyperbeln***. Die Schnitte parallel mit der xy Ebene geben vier Curvensysteme, je nachdem n gerade oder ungerade ist und a und b gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

Es seien a und b positiv und n sei eine *gerade* Zahl. In diesem Falle ist jede Curve zwischen zwei mit der y Axe parallelen Asymptoten eingeschlossen und der Scheitel entfernt sich von der x Axe um so mehr, je kleiner z wird. Für ein unendlich grofses z fällt die Curve mit der x Axe zusammen.

Ist n *ungerade,* so fällt eine der mit der y Axe parallelen Asymptoten weg und statt ihrer wird die x Axe zur Asymptote.

Haben a und b entgegengesetzte Zeichen, so nehmen die Curven, sowohl für ein gerades, als für ein ungerades n, in Bezug auf die Coordinaten-Axen die entgegengesetzte Lage und Richtung an.

Wir haben nun

$$ds = -\frac{a}{n}\sqrt[n]{(ab)}.dz\int\frac{dx}{(az-x^n)^{1+\frac{1}{n}}},$$

welches Integral, dem vorhergehenden Paragraph gemäfs, unbestimmt gefunden werden kann. Man erhält

$$ds = -\frac{1}{n}\sqrt[n]{(ab)}\cdot\frac{dz}{z}\left\{\frac{x}{\sqrt[n]{(x^n-az)}}+\text{Const.}\right\}.$$

Bezeichnet nun $\psi(z)$ die Wurzel der Gleichung

$$(az-x^n)\chi(x)^n-ab = 0,$$

so ist ds

von 0 bis ξ,

von 0 bis $\psi(z)$

zu nehmen, und wenn man die resultirenden Werthe von ds mit $f(z)$ multiplicirt und beziehungsweise

von ∞ bis $\frac{\xi^n}{a}+\frac{b}{\eta^n}$,

von $\frac{\xi^n}{a}+\frac{b}{\eta^n}$ bis $\frac{b}{\chi(0)^n}$

integrirt, so erhält man

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}f\left(\frac{x^n}{a}+\frac{b}{y^n}\right)dy$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{(ab)}\left\{\xi\int_{\frac{\xi^n}{a}+\frac{b}{\eta^n}}^{\infty}\frac{f(z)}{z}\cdot\frac{dz}{\sqrt[n]{(az-\xi^n)}}+\int_{\frac{b}{\chi(0)^n}}^{\frac{\xi^n}{a}+\frac{b}{\eta^n}}\frac{f(z)}{z}\cdot\frac{\psi(z)dz}{\sqrt[n]{(az-\psi(z)^n)}}\right\}.$$

Wenn $\chi(x)=\eta$ constant ist, ergiebt sich hieraus

$$\int_0^\xi dx\int_0^\eta f\left(\frac{x^n}{a}+\frac{b}{y^n}\right)dy$$

$$= \frac{\xi}{n}\sqrt[n]{(ab)}\int_{\frac{\xi^n}{a}+\frac{b}{\eta^n}}^{\infty}\frac{f(z)}{z}\cdot\frac{dz}{\sqrt[n]{(az-\xi^n)}}+\frac{1}{n}\sqrt[n]{a}\int_{\frac{b}{\eta^n}}^{\frac{\xi^n}{a}+\frac{b}{\eta^n}}\frac{f(z)}{z}\cdot\sqrt[n]{(z\eta^n-b)}.dz.$$

Für $\xi = \infty$ ist

$$\int_0^\infty dx \int_0^\eta f\left(\frac{x^n}{a} + \frac{b}{y^n}\right) dy = \frac{1}{n} \sqrt[n]{a} \int_{\frac{b}{\eta^n}}^\infty \frac{f(z)}{z} \sqrt[n]{(z\eta^n - b)} . dz.$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man, wenn wieder a und b positiv sind und n eine *gerade* Zahl bezeichnet, die Formel

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{a}{x^n} + \frac{y^n}{b}\right) dy$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt[n]{b} \left\{ \int_{\frac{a}{\xi^n}}^{\frac{a}{\xi^n} + \frac{\eta^n}{b}} \frac{f(z)}{z} \sqrt[n]{(z\xi^n - a)}\, dz + \int_{\frac{a}{\xi^n} + \frac{\eta^n}{b}}^\infty \frac{f(z)}{z} \sqrt[n]{(z\psi(z)^n - a)\, dz} \right\},$$

wo $\psi(z)$ aus der Gleichung

$$(bz - \chi(x)^n)\, x^n - ab = 0$$

zu ermitteln ist.

Wenn $\chi(x) = \eta$ constant ist, geht die Formel in

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f\left(\frac{a}{x^n} + \frac{y^n}{b}\right) dy$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt[n]{b} \int_{\frac{a}{\xi^n}}^{\frac{a}{\xi^n} + \frac{\eta^n}{b}} \frac{f(z)}{z} \sqrt[n]{(z\xi^n - a)}\, dz + \frac{\eta}{n} \sqrt[n]{(ab)} \int_{\frac{a}{\xi^n} + \frac{\eta^n}{b}}^\infty \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{dz}{\sqrt[n]{(bz - \eta^n)}}$$

über. Ist insbesondere noch $\eta = \infty$, so folgt:

$$\int_0^\xi dx \int_0^\infty f\left(\frac{x^n}{a} + \frac{b}{y^n}\right) dy = \frac{1}{n} \sqrt[n]{b} \int_{\frac{a}{\xi^n}}^\infty \frac{f(z)}{z} \sqrt[n]{(z\xi^n - a)}\, dz.$$

Es liefse sich zeigen, dafs diese Formeln für alle positiven Werthe von n gültig sind.

Schliefslich ist zu bemerken, dafs für alle rationalen Werthe von n das Doppel-Integral, dessen Argument der allgemeinere Ausdruck

$$\frac{a}{x^{2n}} + 2b \frac{y^n}{x^n} + cy^{2n}$$

ist, auf Quadraturen gebracht werden kann. Die Resultate können hier nicht wohl ausgeführt werden.

31.

Es sei

$$z = (ax^n + b)(\alpha y + \beta)^n,$$

so wird es, mit den nothwendigen Unterscheidungen, ob n eine gerade oder eine ungerade positive Zahl ist und ob a und b gleiche oder verschiedene Zeichen haben, nicht schwer sein, die Gestalt der krummen Fläche, so wie auch den Lauf der Curven zu finden, welche die Schnitte parallel mit der xy Ebene bilden.

Wir wollen nur des einen der vier möglichen Fälle gedenken, und zwar annehmen, die Coëfficienten a, b, α, β haben gleiche Zeichen und n sei eine gerade Zahl. Alsdann nähern sich die Curven der xy Ebene einer mit der x Axe parallelen Asymptote, deren Entfernung von dieser Axe $= -\frac{\beta}{\alpha}$ ist. Diese Curven sind symmetrisch zur y Axe und jede einzelne hat zwei Wendepuncte.

Dies vorausgesetzt, erhält man

$$ds = \frac{dz}{anz^{1-\frac{1}{n}}}\left\{\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(ax^n+b)}} + \text{Const.}\right\}$$

oder, wenn man eine neue Veränderliche t, welche durch die Gleichung

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\cdot\frac{t}{\sqrt[n]{(1-t^n)}}$$

bestimmt wird, einführt:

$$ds = \frac{dz}{n\alpha a^{\frac{1}{n}} z^{1-\frac{1}{n}}}\left\{\int\frac{dt}{1-t^n} + \text{Const.}\right\}$$

Dieses Integral ist, wie bekannt, stets findbar; also läfst sich die Reduction des Doppel-Integrals stets ausführen. Die Grenzen, zwischen welchen ds nach und nach zu nehmen ist, erstrecken sich, wie man, den obigen Andeutungen gemäfs, sehen wird, nach x

$$\text{von } 0 \text{ bis } \frac{1}{\beta}\sqrt[n]{\frac{z-b\beta^n}{a}},$$
$$\text{von } 0 \text{ bis } \xi,$$
$$\text{von } 0 \text{ bis } \psi(z);$$

wo $\psi(z)$ die Auflösung der Gleichung

$$(ax^n+b)(\alpha\chi(x)+\beta)^n - z = 0$$

darstellt. Das Integral nach t ist also beziehlich

von 0 bis $\sqrt[n]{\left(1-\frac{b\beta^n}{z}\right)}$,

von 0 bis $\frac{\xi\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{(a\xi^n+b)}}$,

von 0 bis $\frac{\psi(z)\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{(a\psi(z)^n+b)}}$

zu nehmen. Multiplicirt man die Werthe von ds mit $f(z)$ und integrirt nach z,

von $b\beta^n$ bis $(a\xi^n+b)\beta^n$,
von $(a\xi^n+b)\beta^n$ bis $(a\xi^n+b)(\alpha\eta+\beta)^n$,
von $(a\xi^n+b)(\alpha\eta+\beta)^n$ bis $b(\alpha\chi(0)+\beta)^n$,

so ergiebt sich die folgende Formel, durch welche die verlangte Reduction ausgeführt ist:

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)} f\{(ax^n+b)(\alpha y+\beta)^n\}dy$$

$$=\frac{1}{n\alpha a^{\frac{1}{n}}}\int_{b\beta^n}^{(a\xi^n+b)\beta^n}\frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}f(z)\int_0^{\sqrt[n]{\left(1-\frac{b\beta^n}{z}\right)}}\frac{dt}{1-t^n}$$

$$+\frac{1}{n\alpha a^{\frac{1}{n}}}\left\{\int_{(a\xi^n+b)\beta^n}^{(a\xi^n+b)(\alpha\eta+\beta)^n}\frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}f(z)\int_0^{\xi\sqrt[n]{\frac{a}{a\xi^n+b}}}\frac{dt}{1-t^n}\right.$$

$$\left.+\int_{(a\xi^n+b)(\alpha\eta+\beta)^n}^{b(\alpha\chi(0)+\beta)^n}\frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}f(z)\int_0^{\psi(z)\sqrt[n]{\frac{a}{a\psi(z)^n+b}}}\frac{dt}{1-t^n}\right\}$$

Ist hier $\chi(x)=\eta$ constant, so findet man nach einigen Umformungen:

$$\int_0^\xi dx\int_0^\eta f\{(ax^n+b)(\alpha y+\beta)^n\}dy=\frac{1}{n\alpha a^{\frac{1}{n}}}\int_{b\beta^n}^{(a\xi^n+b)\beta^n}\frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}f(z)\int_0^{\sqrt[n]{\left(1-\frac{b\beta^n}{z}\right)}}\frac{dt}{1-t^n}$$

$$+\frac{1}{n\alpha a^{\frac{1}{n}}}\left\{\int_{(a\xi^n+b)\beta^n}^{(a\xi^n+b)(\alpha\eta+\beta)^n}\frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}f(z)\int_0^{\xi\sqrt[n]{\frac{a}{a\xi^n+b}}}\frac{dt}{1-t^n}\right.$$

$$\left.+\int_{(a\xi^n+b)(\alpha\eta+\beta)^n}^{b(\alpha\eta+\beta)^n}\frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}f(z)\int_0^{\sqrt[n]{\left(1-\frac{b(\alpha\eta+\beta)^n}{z}\right)}}\frac{dt}{1-t^n}\right\}.$$

32.

Der Raum gestattet nicht, eine gröfsere Anzahl algebraischer Formen des Arguments, auf welche das bisherige Verfahren anwendbar ist und deren sich beliebig viele angeben lassen, ausführlich zu untersuchen. Wir müssen uns auf die angeführten einfachsten Fälle beschränken. Indessen werden sich die Reductionsformeln mit gleicher Leichtigkeit aufstellen lassen, wenn das Argument einer der folgenden Ausdrücke ist:

$$\alpha x+\beta y+\sqrt{(ax^2+2bxy+cy^2+2mx+2ny+l)},$$

$$\frac{ax^m+b}{\alpha x^m+\beta}x^n y^n, \qquad \frac{ay+b}{\alpha y+\beta}X,$$

wo X irgend eine rationale Function von x bezeichnet. U. s. f.

Für *transcendente* Ausdrücke bleibt das Verfahren dasselbe, aber die vollständige Lösung der Aufgabe gelingt seltener, weil hier die Darstellung des Elements ds in endlicher Form seltener möglich ist, als bei algebraischen Ausdrücken. Es mögen einige hierher gehörige Fälle betrachtet werden.

33.

Es sei

$$z = ae^{\alpha x}+be^{\beta y},$$

so hat man

$$ds = -\frac{dz}{\alpha\beta z}\{\log(ze^{-\alpha x}-a)+\text{Const.}\}.$$

Die Curven in der xy Ebene haben Asymptoten, die mit den Coordinaten-Axen parallel sind und deren Lage durch die Coordinaten

$$x_0=\frac{1}{\alpha}\log\frac{z}{a} \quad \text{und} \quad y_0=\frac{1}{\beta}\log\frac{z}{b}$$

bestimmt wird.

Ist $\psi(z)$ die einzige zwischen 0 und ξ liegende reelle Wurzel der Gleichung

$$ae^{\alpha x}+be^{\beta\chi(x)}-z=0$$

und läfst man ds

$$\begin{aligned}
&\text{von} \quad 0 \quad \text{bis} \quad \frac{1}{\alpha}\log\frac{z-b}{a},\\
&\text{von} \quad \psi(z) \quad \text{bis} \quad \frac{1}{\alpha}\log\frac{z-b}{a},\\
&\text{von} \quad \psi(z) \quad \text{bis} \quad \xi,
\end{aligned}$$

und die spätere Integration nach z

von $a+b$ bis $a+be^{\beta\chi(0)}$,
von $a+be^{\beta\chi(0)}$ bis $ae^{\alpha\xi}+b$,
von $ae^{\alpha\xi}+b$ bis ξ

sich erstrecken, so wird man die Gleichung

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(ae^{\alpha x}+be^{\beta y})\,dy = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{ae^{\alpha\xi}+b}^{ae^{\alpha\xi}+be^{\beta\eta}} f(z)\log\frac{ze^{-\alpha\psi(z)}-a}{ze^{-\alpha\xi}-a}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$+\frac{1}{\alpha\beta}\left\{\int_{a+b}^{a+be^{\beta\chi(0)}} f(z)\log\frac{(z-a)(z-b)}{ab}\cdot\frac{dz}{z}+\int_{a+be^{\beta\chi(0)}}^{ae^{\alpha\xi}+be^{\beta\eta}} f(z)\log\frac{(ze^{-\alpha\psi(z)}-a)(z-b)}{ab}\cdot\frac{dz}{z}\right\}$$

finden. Ist $\chi(x)=\eta$ constant, so erhält man hieraus

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ae^{\alpha x}+be^{\beta y})\,dy$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\left\{\int_0^{ae^{\alpha\xi}+b} f(z)\log\frac{(z-b)(z-ae^{\alpha\xi})}{ab\,e^{\alpha\xi}}\cdot\frac{dz}{z}+\int_0^{be^{\beta\eta}+a} f(z)\log\frac{(z-a)(z-be^{\beta\eta})}{ab\,e^{\beta\eta}}\cdot\frac{dz}{z}\right\}$$

$$+\frac{1}{\alpha\beta}\left\{\int_0^{a+b} f(z)\log\frac{ab}{(z-a)(z-b)}\cdot\frac{dz}{z}+\int_0^{ae^{\alpha\xi}+be^{\beta\eta}} f(z)\log\frac{ab\,e^{\alpha\xi+\beta\eta}}{(z-ae^{\alpha\xi})(z-be^{\beta\eta})}\cdot\frac{dz}{z}\right\}.$$

Setzt man hier $\xi=\eta=\infty$, so ergiebt sich, in der Voraussetzung dafs a, b, α, β positiv sind:

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ae^{\alpha x}+be^{\beta y})\,dy = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{a+b}^{\infty} f(z)\log\frac{(z-a)(z-b)}{ab}\cdot\frac{dz}{z};$$

wie sich auch auf anderm Wege finden liefse.

Es sei z. B.

$$f(z) = e^{-z},$$

ferner $\alpha=\beta$ und $a=b$, so ist

$$\left\{\int_0^{\infty} e^{-ae^{\alpha x}}.dx\right\}^2 = \frac{2}{\alpha^2}\int_{2a}^{\infty} e^{-z}\log\left(\frac{z}{a}-1\right)\cdot\frac{dz}{z}$$

oder, da

$$\int_0^{\infty} e^{-ae^{\alpha x}}dx = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{e^{-a}}\frac{dx}{\log x} = -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{li}(e^{-a})$$

ist, so ergiebt sich für den Integrallogarithmus die neue Relation

$$\{\mathrm{li}(e^{-a})\}^2 = 2\int_{2a}^{\infty} e^{-z}\log\left(\frac{z}{a}-1\right)\frac{dz}{z}$$

oder

$$= 2\int_1^{\infty} e^{-2az}\log(2z-1)\frac{dz}{z}.$$

Integrirt man beiderseits nach a zwischen den Grenzen a und ∞, so findet sich die bemerkenswerthe Gleichung

$$\int_a^\infty \{\mathrm{li}(e^{-a})\}^2 da = \int_1^\infty e^{-2az}\log(2z-1)\frac{dz}{z^2},$$

auf welche wieder beliebig oft dieselbe Operation angewendet werden kann.

Es werde schliefslich bemerkt, dafs sich die Reduction des Doppel-Integrals ebenfalls vollständig erreichen läfst, wenn das Argument einer der Ausdrücke

$$\frac{ay+b}{\alpha y+\beta}\cdot\frac{me^{kx}+n}{\mu e^{kx}+\nu}, \quad \frac{\log(ax+b)}{\log(\alpha y+\beta)},$$

$$\frac{a\,\mathrm{tang}\,kx+b}{\alpha\,\mathrm{tang}\,kx+\beta}\cdot\frac{me^{ky}+n}{\mu e^{ky}+\nu}, \quad Xe^{ky}$$

u. s. w. ist, wo X irgend eine Function von x bezeichnet.

Für jetzt beschränke ich mich auf die Betrachtung des folgenden Falles.

34.

Es sei

$$z = \frac{a\cos x+b\sin x+c}{\alpha y+\beta},$$

so ist

$$ds = -\frac{dz}{\alpha z^2}(a\sin x - b\cos x + cx + \text{Const.}).$$

Die Fläche, deren Ordinate z ist, hat eine mit xz parallele Asymptoten-Ebene, welche durch $y_0 = -\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmt wird; und sie durchschneidet die xy Ebene unendlich oft nach Parallelen zur y Axe, welche durch die Gleichungen

$$\sin x_0 = \frac{-bc\pm a\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{a^2+b^2}, \quad \cos x_0 = \frac{-ac\mp b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{a^2+b^2}$$

gegeben sind. In den Puncten (x_0, y_0) bleibt z jedesmal wesentlich unbestimmt, so dafs alle Curven in der xy Ebene durch diese Puncte gehen. Die Ordinate y jener Curven erreicht Maxima und Minima für

$$\mathrm{tang}\,x = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}+\frac{c\pm\sqrt{(a^2+b^2)}}{\alpha z}.$$

Nach diesen Andeutungen hat die Bestimmung der Grenzen keine Schwierigkeit.

Betrachten wir nun den besondern Fall

$$c = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1,$$

so ist

$$y_0 = 0, \quad \sin x_0 = \pm\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \quad \cos x_0 = \mp\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

und nimmt man an, es solle nach x, zwischen $-x_0$ und $+x_0$, und nach y von 0 bis ∞ integrirt werden, so ergiebt sich

$$ds = -2\sqrt{(a^2+b^2)}.\frac{dz}{z^2},$$

und wenn man zur Abkürzung

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \sin\lambda$$

setzt. so findet man schliefslich die Gleichung

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} dx \int_0^{\infty} f\left(\frac{a\cos x + b\sin x}{y}\right) dy = 2\sqrt{(a^2+b^2)}\int_0^{\infty} f(z)\frac{dz}{z^2}.$$

35.

Bisher wurde angenommen, es komme aufser der Function f kein veränderlicher Factor unter den Integralzeichen vor. Aber auch wenn ein solcher Factor $F(x,y)$ hinzukommt, läfst sich das Verfahren fast unverändert auch auf diesen Fall anwenden.

Bezeichnet man nämlich das Argument der Function f wieder mit z und eliminirt die Veränderliche y, wodurch $F(x,y)$ zur Function von x und z wird, so bezieht sich die Integration nach x, statt auf die Bildung der Summe von Flächen-Elementen $\left(\frac{dy}{dz}\right)dz\,dx$ eines Streifens ds, nunmehr auf die Summirung von Elementen

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)F(x,y)\,dz\,dx;$$

wobei man sich unter $F(x,y)$ etwa die *Dichtigkeit* des Elements $\left(\frac{dy}{dz}\right)dz\,dx$ vorstellen kann. Hat man durch die Integration

$$dS = dz\left(\int\left(\frac{dy}{dz}\right)F(x,y)\,dx + \text{Const.}\right)$$

gefunden, so besteht nun das Doppel-Integral aus Theilen von der Form

$$\int f(z)\,dS + \text{Const.}$$

Die Bestimmung der Grenzen nach x und z geschieht genau auf dieselbe Weise wie bisher, und die Grenzwerthe sind dieselben Ausdrücke wie früher, wenn das Argument dasselbe ist. Wir fügen nur noch bei, dafs durch Hinzukommen des Factors F entweder eine Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse erreicht, oder, wie in mehreren der folgenden Fälle, die Reduction des Doppel-Integrals ermöglicht wird.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dafs es öfters zweckmäfsiger ist, statt y, die Veränderliche x zu eliminiren und dS durch Integration nach y abzuleiten, so dafs

$$dS = dz\left(\int\left(\frac{dx}{dz}\right)F(x,y)\,dy + \text{Const.}\right) \text{ ist.}$$

Enthält F nur eine der Veränderlichen, so ist auf gleiche Weise zu verfahren.

Die Anwendung auf die folgenden Fälle, welche, wie ich glaube, besondere Beachtung verdienen, wird weitere Auseinandersetzungen ersparen.

36.

Es sei zunächst wieder

$$z = ax + by$$

und nun

$$F(x,y) = \frac{1}{(mx+n)(\mu x+\nu y)},$$

also

$$dS = \frac{dz}{m\mu z + an\mu + bm\nu}\left\{\log\frac{mx+n}{-a\mu x + b\nu + \mu z} + \text{Const.}\right\}.$$

Die Grenzen, zwischen welchen dieser Ausdruck genommen und später nach z integrirt werden mufs, sind die in (§. 17.) angegebenen. Es findet sich also die Formel

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(ax+by)\frac{dy}{(mx+n)(\mu y+\nu)}$$
$$= \int_0^{a\xi}\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{(mz+na)(\mu z+\nu b-a\mu\xi)}{ab\nu(m\xi+n)}$$
$$+\int_0^{b\chi(0)}\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{(\mu z+\nu b)(m\psi(z)+n)}{n(\mu z-a\mu\psi(z)+\nu b)}$$
$$+\int_0^{a\xi+b\eta}\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{(m\xi+n)(\mu z-a\mu\psi(z)+\nu b)}{(m\psi(z)+n)(\mu z+\nu b-a\mu\xi)}.$$

Diese Formel wird vollständig symmetrisch, wenn die obere Grenze $\chi(x)$ constant ist. Nach einigen leichten Umformungen findet man

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(ax+by)\cdot\frac{dy}{(mx+n)(\mu y+\nu)}$$
$$= \int_0^{a\xi}\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{(\mu z+\nu b-a\mu\xi)(mz+na)}{ab\nu(m\xi+n)}$$
$$+\int_0^{b\eta}\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{(mz+na-mb\eta)(mz+\nu b)}{abn(\mu\eta+\nu)}$$
$$+\int_0^{a\xi+b\eta}\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{ab(m\xi+n)(\mu\eta+\nu)}{(mz+an-bm\eta)(\mu z+b\nu-a\mu\xi)}.$$

Für $\xi=\eta=\infty$ folgt hieraus

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(ax+by)\frac{dy}{(mx+n)(\mu y+\nu)}$$

$$=\int_0^\infty\frac{f(z)\,dz}{m\mu z+an\mu+bm\nu}\log\frac{(mz+na)(\mu z+\nu b)}{abn\nu}.$$

Setzt man hierin $m=\mu$, $n=\nu$, $a=b$ und

$$f(z)=e^{-z},$$

so folgt

$$\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-ax}}{mx+n}dx\right\}^2=\frac{2}{m}\int_0^\infty\frac{e^{-az}dz}{mz+2n}\log\left(1+\frac{m}{n}z\right).$$

Zur Verification leite man hieraus

$$\int_{2a}^\infty e^{-z}\log\left(\frac{z}{a}-1\right)\frac{dz}{z}=\tfrac{1}{2}e^{2a}\left\{\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x+a}dx\right\}^2$$

ab und verbinde diese Formel mit der in (§. 33.) gefundenen, dann wird man zu folgender bekannten Gleichung gelangen:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x-a}dx=-e^a\,\mathrm{li}(e^{-a}).$$

37.

Indem wir das obige Argument beibehalten, möge

$$F(x,y)=\frac{(Ax+By+C)^m}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^\mu}$$

gesetzt werden. Alsdann ergiebt sich

$$dS=\frac{dz}{b^{m-\mu+1}}\int\frac{\{(Ab-Ba)x+Bz+Cb\}^m}{\{(\alpha b-\beta a)x+\beta z+\gamma b\}^\mu}dx.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$Ab-Ba=A_1,\qquad Bz+Cb=\alpha_1,$$
$$\alpha b-\beta a=B_1,\qquad \beta z+\gamma b=\beta_1,$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}f(ax+by)\frac{(Ax+By+C)^m}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^\mu}dy$$

$$=\frac{1}{b^{m-\mu+1}}\left\{\int_0^{b\chi(0)}f(z)\,dz\int_0^{\frac{z}{a}}\frac{(A_1x+B_1)^m}{(\alpha_1x+\beta_1)^\mu}dx+\int_{b\chi(0)}^{a\xi}f(z)\,dz\int_{\psi(z)}^{\frac{z}{a}}\frac{(A_1x+B_1)^m}{(\alpha_1x+\beta_1)^\mu}dx\right.$$
$$\left.+\int_{a\xi}^{a\xi+b\eta}f(z)\,dz\int_{\psi(z)}^{\xi}\frac{(A_1x+B_1)^m}{(\alpha_1x+\beta_1)^\mu}dx\right\}$$

Die Integration nach x läfst sich immer unbestimmt ausführen, wenn entweder

$$m, \quad \text{oder} \quad m-\mu, \quad \text{oder} \quad \mu$$

eine *ganze* Zahl ist. In diesen Fällen kann also die Reduction des Doppel-Integrals vollständig geschehen. Die allgemeine Ausführung kann hier jedoch nicht Platz finden und wir müssen uns auf die Betrachtung einiger speciellen Fälle beschränken.

Es sei

$$A=-1, \quad B=0, \quad C=\xi, \quad a=0, \quad b=+1,$$
$$\alpha=+1, \quad \beta=-1, \quad \mu=n, \quad m=n-1,$$
$$\chi(x)=x, \quad \text{also} \quad \psi(z)=z.$$

Dann ergiebt sich aus obiger Formel:

$$\int_0^\xi dx \int_0^x f(y)\frac{(\xi-x)^{n-1}}{(x-y)^n}dy = \int_0^\xi f(z)\,dz \int_z^\xi \frac{(\xi-x)^{n-1}}{(x-z)^n}dx.$$

Setzt man

$$\frac{\xi-x}{x-z}=t$$

und liegt n zwischen 0 und 1, so geht das Integral nach x in

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{t+1} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

über und man erhält also die in (§. 13.) gefundene Formel wieder.

Zu einem zweiten Beispiel wollen wir annehmen:

$$A=B=0, \quad C=1, \quad \mu=n.$$

Hier ist

$$dS = b^{n-1}dz\int\frac{dx}{\{(\alpha b-\beta a)x+\beta z+b\gamma\}^n}$$

oder

$$dS = \frac{b^{n-1}dz}{(n-1)(a\beta-\alpha b)}\left\{\frac{1}{\{(\alpha b-\beta a)x+\beta z+b\gamma\}^{n-1}}+\text{Const.}\right\}.$$

Nach der allgemeinen Formel ist also

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}\frac{f(ax+by)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^n}dy$$
$$=\frac{1}{(n-1)(a\beta-\alpha b)}\int_0^{a\xi}f(z)\left\{\frac{a^{n-1}}{(\alpha z+a\gamma)^{n-1}}-\frac{b^{n-1}}{((\alpha b-a\beta)\xi+\beta z+b\gamma)^{n-1}}\right\}dz$$
$$+\frac{1}{(n-1)(b\alpha-\beta a)}\int_0^{b\chi(0)}f(z)\left\{\frac{b^{n-1}}{(\beta z+b\gamma)^{n-1}}-\frac{b^{n-1}}{((\alpha b-a\beta)\psi(z)+\beta z+b\gamma)^{n-1}}\right\}dz$$
$$+\frac{1}{(n-1)(a\beta-\alpha b)}\int_0^{a\xi+b\eta}f(z)\left\{\frac{b^{n-1}}{((\alpha b+a\beta)\xi+\beta z+b\gamma)^{n-1}}-\frac{b^{n-1}}{((\alpha b-a\beta)\psi(z)+\beta z+b\gamma)^{n-1}}\right\}dz.$$

Diese Formel wird vollständig symmetrisch, wenn $\chi(x)$ constant ist. Man findet dann

$$\int_0^\xi dx\int_0^\eta \frac{f(ax+by)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^n}dy$$

$$=\frac{1}{(n-1)(a\beta-\alpha b)}\int_0^{a\xi} f(z)\left\{\frac{a^{n-1}}{(\alpha z+a\gamma)^{n-1}}-\frac{b^{n-1}}{((\alpha b-a\beta)\xi+\beta z+b\gamma)^{n-1}}\right\}dz$$

$$+\frac{1}{(n-1)(b\alpha-\beta a)}\int_0^{b\eta} f(z)\left\{\frac{b^{n-1}}{(\beta z+b\gamma)^{n-1}}-\frac{a^{n-1}}{((a\beta-\alpha b)\eta+\alpha z+a\gamma)^{n-1}}\right\}dz$$

$$+\frac{1}{n-1}\int_0^{a\xi+b\eta} f(z)\left\{\frac{1}{b\alpha-\beta a}\cdot\frac{a^{n-1}}{((a\beta-\alpha b)\eta+\alpha z+a\gamma)^{n-1}}+\frac{1}{a\beta-\alpha b}\cdot\frac{b^{n-1}}{((b\alpha-\beta a)\xi+\beta z+b\gamma)^{n-1}}\right\}dz.$$

Ist hier $\xi=\eta=\infty$ und verschwindet $f(z)$ für $z=\infty$, so ist

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty \frac{f(ax+by)}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^n}dy$$

$$=\frac{a^{n-1}}{(n-1)(a\beta-\alpha b)}\int_0^\infty \frac{f(z)}{(\alpha z+a\gamma)^{n-1}}dz+\frac{b^{n-1}}{(n-1)(b\alpha-\beta a)}\int_0^\infty \frac{f(z)}{(\beta z+b\gamma)^{n-1}}dz.$$

38.

Die letztere Gleichung führt zu einer weitern Relation. Setzt man nämlich $f(z)=e^{-z}$ und erinnert sich, dafs

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty \frac{e^{-ax-by}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^n}dy=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}e^{-\gamma z}}{(\alpha z+a)(\beta z+b)}dz$$

ist, so erhält man aus der Vergleichung beider Resultate:

$$\int_0^\infty \frac{z^n e^{-kz}}{(\alpha z+a)(\beta z+b)}dz=\frac{\Gamma(n+1)}{nk^{n-1}}\left\{\frac{a^n}{a\beta-\alpha b}\int_0^\infty \frac{e^{-kz}dz}{(\alpha z+a)^n}+\frac{b^n}{b\alpha-\beta a}\int_0^\infty \frac{e^{-kz}dz}{(\beta z+b)^n}\right\}.$$

Nur wenn $n=1$ ist, werden die im vorigen Paragraph gefundenen Formeln unbrauchbar. In diesem Falle aber findet man direct:

$$dS=\frac{dz}{b\alpha-\beta a}\{\log((b\alpha-\beta a)x+\beta z+b\gamma)+\text{Const.}\}.$$

Ist z. B. $\chi(x)$ constant, so ergiebt sich

$$\int_0^\xi dx\int_0^\eta \frac{f(ax+by)}{\alpha x+\beta y+\gamma}dy=\frac{1}{a\beta-\alpha b}\int_0^{a\xi} f(z)\log\frac{a}{b}\cdot\frac{\beta z+b\gamma+(b\alpha-\beta a)\xi}{\alpha z+a\gamma}dz$$

$$+\frac{1}{b\alpha-\beta a}\int_0^{b\eta} f(z)\log\frac{b}{a}\cdot\frac{\alpha z+a\gamma+(a\beta-\alpha b)\eta}{\beta z+b\gamma}dz$$

$$+\frac{1}{b\alpha-\beta a}\int_0^{a\xi+b\eta} f(z)\log\frac{a}{b}\cdot\frac{\beta z+b\gamma+(b\alpha-\beta a)\xi}{\alpha z+a\gamma+(a\beta-\alpha b)\eta}dz.$$

Für die bisherige Form des Arguments sei weiter

$$F(x,y) = e^{a^2x^2-b^2y^2},$$

so findet sich

$$dS = \frac{dz}{2abz} e^{-z^2}(e^{2axz} + \text{Const.}),$$

und wenn die drei sich ergebenden Werthe von dS zwischen den bekannten Grenzen integrirt werden, so erhält man, nach einigen Umformungen, die Gleichung

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} f(ax+by) . e^{a^2x^2-b^2y^2} dy$$

$$= \frac{1}{2ab} \left\{ \int_0^{a\xi} \frac{f(z)}{z} e^{z^2} dz - \int_0^{b\chi(0)} \frac{f(z)}{z} e^{-z^2} dz + \int_{a\xi}^{a\xi+b\eta} \frac{f(z)}{z} e^{2a\xi z - z^2} dz \right.$$
$$\left. - \int_{b\eta}^{a\xi+b\eta} \frac{f(z)}{z} e^{-2b\eta z + z^2} dz \right\}.$$

Wenn $\xi = \eta = \infty$ ist, so folgt hieraus:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax+by) . e^{a^2x^2-b^2y^2} dy = \frac{1}{2ab} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(z)}{z} e^{z^2} dz - \int_0^\infty \frac{f(z)}{z} e^{-z^2} dz \right\}.$$

39.

Endlich wollen wir noch annehmen, es sei

$$F(x,y) = e^{mx+ny} \cos(\mu x + \nu y).$$

Dann erhält man

$$dS = \frac{dz}{b} \int e^{\frac{(bm-an)x+nz}{b}} \cos \frac{(b\mu - a\nu)x + \nu z}{b} dx$$

und wenn man die Integration ausführt,

$$dS = \frac{dz}{(bm-an)^2 + (b\mu - a\nu)^2} \left\{ \left((bm-an) \cos \frac{(b\mu - a\nu)x + \nu z}{b} \right. \right.$$
$$\left. \left. + (b\mu - a\nu) \sin \frac{(b\mu - a\nu)x + \nu z}{b} \right) e^{\frac{(bm-an)x+nz}{b}} + \text{Const.} \right\}.$$

Dehnt man diese und die darauf folgende Integration nach z auf die früher angegebenen Grenzen aus, so findet sich, nach einigen Verwandlungen:

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)} f(ax+by).e^{mx+ny}\cos(\mu x+\nu y)\,dy$$

$$=\frac{1}{(bm-an)^2+(b\mu-a\nu)^2}\left\{\int_0^{a\xi} f(z)\left\{(bm-an)\cos\frac{\mu}{a}z+(b\mu-a\nu)\sin\frac{\mu}{a}z\right\}e^{\frac{m}{a}z}dz\right.$$

$$\left.+\int_0^{b\chi(0)} f(z)\left\{(an-bm)\cos\frac{\nu}{b}z+(a\nu-b\mu)\sin\frac{\nu}{b}z\right\}e^{\frac{n}{b}z}dz\right\}$$

$$+\frac{1}{(bm-an)^2+(b\mu-a\nu)^2}\left\{\begin{aligned}&\int_{a\xi}^{a\xi+b\eta} f(z)\left\{(bm-an)\cos\frac{(b\mu-a\nu)\xi+\nu z}{b}\right.\\&\qquad\left.+(b\mu-a\nu)\sin\frac{(b\mu-a\nu)\xi+\nu z}{b}\right\}e^{\frac{(bm-an)\xi+nz}{b}}.dz\\&+\int_{b\chi(0)}^{a\xi+b\eta} f(z)\left\{(an-bm)\cos\frac{(b\mu-a\nu)\psi(z)+\nu z}{b}\right.\\&\qquad\left.+(a\nu-b\mu)\sin\frac{(b\mu-a\nu)\psi(z)+\nu z}{b}\right\}e^{\frac{(bm-an)\psi(z)+nz}{b}}.dz\end{aligned}\right\}$$

Ist hier $\chi(x)$ constant, so geht die Formel in

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi} f(ax+by)e^{mx+ny}\cos(\mu x+\nu y)\,dy$$

$$=\frac{1}{(bm-an)^2+(b\mu-a\nu)^2}\left\{\int_0^{a\xi} f(z)\left\{(bm-an)\cos\frac{\mu}{a}z+(b\mu-a\nu)\sin\frac{\mu}{a}z\right\}e^{\frac{m}{a}z}.dz\right.$$

$$\left.+\int_0^{b\eta} f(z)\left\{(an-bm)\cos\frac{\nu}{b}z+(a\nu-b\mu)\sin\frac{\nu}{b}z\right\}e^{\frac{n}{b}z}.dz\right\}$$

$$+\frac{1}{(bm-an)^2+(b\mu-a\nu)^2}\left\{\begin{aligned}&\int_{a\xi}^{a\xi+b\eta} f(z)\left\{(bm-an)\cos\frac{(b\mu-a\nu)\xi+\nu z}{b}\right.\\&\qquad\left.+(b\mu-a\nu)\sin\frac{(b\mu-a\nu)\xi+\nu z}{b}\right\}e^{\frac{(bm-an)\xi+nz}{b}}.dz\\&+\int_{b\eta}^{a\xi+b\eta} f(z)\left\{(an-bm)\cos\frac{(a\nu-b\mu)\eta+\mu z}{a}\right.\\&\qquad\left.+(a\nu-b\mu)\sin\frac{(a\nu-b\mu)\eta+\mu z}{a}\right\}e^{\frac{(an-bm)\eta+mz}{a}}.dz\end{aligned}\right\}$$

über. Setzt man in dieser Formel ξ und η unendlich grofs und betrachtet m und n als negativ, so verschwinden, wenn $f(z)$ für $z=\infty$ endlich bleibt, die beiden letzten Integrale und man erhält

$$\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(ax+by)e^{mx+ny}\cos(\mu x+\nu y)\,dy$$

$$=\frac{1}{(bm-an)^2+(b\mu-a\nu)^2}\left\{\int_0^\infty f(z)\left((bm-an)\cos\frac{\mu}{a}z+(b\mu-a\nu)\sin\frac{\mu}{a}z\right)e^{\frac{m}{a}z}.dz\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty f(z)\left((an-bm)\cos\frac{\nu}{b}z+(a\nu-b\mu)\sin\frac{\nu}{b}z\right)e^{\frac{n}{b}z}.dz\right\}.$$

Sind aufserdem noch $\mu = \nu = 0$, so ergiebt sich

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax+by)\, e^{mx+ny}\, dy$$

$$= \frac{1}{bm-an} \int_0^{\infty} f(z)\, e^{\frac{m}{a}z}\, dz + \frac{1}{an-bm} \int_0^{\infty} f(z)\, e^{\frac{n}{b}z}\, dz.$$

Setzt man dagegen $m = n = 0$, so erhält man

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(ax+by) \cos(\mu x + \nu y)\, dy$$

$$= \frac{1}{b\mu - a\nu} \int_0^{\infty} f(z) \sin \frac{\mu}{a} z\, dz + \frac{1}{a\nu - b\mu} \int_0^{\infty} f(z) \sin \frac{\nu}{b} z\, dz.$$

U. s. w.

40.

Diese Resultate sind nur Einzelheiten einer allgemeineren Formel. Bezeichnet wieder $F(x,y)$ eine gegebene Function der beiden Veränderlichen, so erhält man gemäfs (§. 17.), nach einigen naheliegenden Umformungen:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(ax+by)\, F(x,y)\, dy$$

$$= \frac{1}{b} \int_0^{a\xi} f(z)\, dz \int_{\xi}^{\frac{z}{a}} F\left(x, \frac{z-ax}{b}\right) dx + \frac{1}{a} \int_0^{b\chi(0)} f(z)\, dz \int_{\varphi(z)}^{\frac{z}{b}} F\left(\frac{z-by}{a}, y\right) dy$$

$$+ \int_0^{a\xi+b\eta} f(z) \left\{ \frac{1}{b} \int_{\frac{z}{2a}}^{\xi} F\left(x, \frac{z-ax}{b}\right) dx + \frac{1}{a} \int_{\frac{z}{2b}}^{\varphi(z)} F\left(\frac{z-by}{a}, y\right) dy \right\} dz;$$

wo $\varphi(z)$ die einzige, zwischen $\chi(0)$ und η vorkommende reelle Wurzel y der Gleichung

$$y - \chi\left(\frac{z-by}{a}\right) = 0$$

ist.

Wenn $\chi(x) = \eta$ constant ist, so wird $\varphi(z) = \eta$, und die Gleichung erhält, wie man sieht, eine durchaus symmetrische Form.

Wir beschliefsen die Betrachtung des linearen Arguments mit dem folgenden besondern Falle.

Das Integral

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\xi - x} \frac{x^{m-1} y^{n-1}}{(ax+by+c)^{m+n}} f(x+y)\, dy$$

geht durch Anwendung des bisherigen Verfahrens in

$$\int_0^\xi f(z)\,dz \int_0^z \frac{x^{m-1}(z-x)^{n-1}dx}{((a-b)x+bz+c)^{m+n}}$$

über, läfst sich aber auch mit Hülfe des in (§. 6.) angeführten *Fourier*schen Theorems, wie bekannt, durch die Quadratur

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^\xi \frac{z^{m+n-1}f(z)\,dz}{(az+c)^m(bz+c)^n}$$

darstellen.

Vergleicht man diese beiden Ergebnisse mit einander und beseitigt das auf die Veränderliche z sich beziehende Integralzeichen, so ergiebt sich

$$\int_0^z \frac{x^{m-1}(z-x)^{n-1}dx}{((a-b)x+bz+c)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\cdot\frac{z^{m+n-1}}{(az+c)^m(bz+c)^n},$$

oder, wenn man die Symmetrie etwas mehr hervortreten läfst:

$$\int_{-z}^{+z} \frac{(z+x)^{m-1}(z-x)^{n-1}dx}{(a(z+x)+b(z-x)+2c)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}\cdot\frac{z^{m+n-1}}{(az+c)^m(bz+c)^n};$$

so dafs die Darstellung eines weitern bestimmten Integrals durch Gammafunctionen gefunden ist.

41.

Nehmen wir an, es sei $z=\frac{x}{y}$ und

$$F(x,y) = e^{mx+ny},$$

so ist

$$dS = \frac{dz}{(mz+n)^2}\Big\{\Big(1-\Big(m+\frac{n}{z}\Big)x\Big)e^{\left(m+\frac{n}{z}\right)x} + \text{Const.}\Big\},$$

folglich

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)} f\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{mx+ny}\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\xi}{\eta}} \frac{f(z)}{(mz+n)^2}\Big\{1+\Big(\Big(m+\frac{n}{z}\Big)\psi(z)-1\Big)e^{\left(m+\frac{n}{z}\right)\psi(z)}\Big\}dz$$

$$+\int_{\frac{\xi}{\eta}}^\infty \frac{f(z)}{(mz+n)^2}\Big\{1+\Big(\Big(m+\frac{n}{z}\Big)\xi-1\Big)e^{\left(m+\frac{n}{z}\right)\xi}\Big\}dz;$$

wo wieder $\psi(z)$ die Wurzel der Gleichung

$$z\chi(x)-x = 0$$

ist.

Für dasselbe Argument z sei ferner

$$F(x,y) = e^{ax^2+2bxy+cy^2},$$

so ist

$$dS = -\frac{dz}{2(az^2+2bz+c)}\left\{e^{(az^2+2bz+c).\frac{x^2}{z^2}} + \text{Const.}\right\};$$

also erhält man

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{x}{y}\right) e^{ax^2+2bxy+cy^2} dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\xi}{\eta}} \frac{f(z)\,dz}{az^2+2bz+c}\left\{e^{(az^2+2bz+c)\frac{\psi(z)^2}{z^2}} - 1\right\} + \tfrac{1}{2}\int_{\frac{\xi}{\eta}}^{\infty} \frac{f(z)\,dz}{az^2+2bz+c}\left\{e^{(az^2+2bz+c)\frac{\xi^2}{z^2}} - 1\right\}.$$

Eben so wird das Doppel-Integral auf Quadraturen gebracht, wenn für $z = \frac{x}{y}$ noch

$$F(x,y) = e^{ax^2+2bxy+cy^2}\cos(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)$$

ist. Ist ferner

$$z = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$$

und

$$F(x,y) = x^m y^n e^{\mu x+\nu y},$$

so finden sich, wenn m und n zwei positive ganze Zahlen bezeichnen, drei einfache Integrale für das entsprechende Doppel-Integral.

42.

Die Resultate des vorigen Paragraphs sind nur einzelne Fälle der folgenden allgemeinen Formel. Bezeichnet $\varphi(z)$ die einzige reelle, zwischen $\chi(0)$ und η vorkommende Wurzel y der Gleichung

$$y - \chi\left(-\frac{(\beta z-b)y+\gamma z-c}{\alpha z-a}\right) = 0,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$F\left(x, -\frac{(\alpha z-a)x+\gamma z-c}{\beta z-b}\right) = F(x),$$

$$F\left(-\frac{(\beta z-b)y+\gamma z-c}{\alpha z-a}, y\right) = F(y),$$

so findet sich, nach (§. 19.)

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) F(x,y)\, dy$$

$$= \int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{b\chi(0)+c}{\beta\chi(0)+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\beta z-b)^2} \int_0^{\frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}} \{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c\} F(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{c}{\gamma}}^{\frac{a\xi+c}{\alpha\xi+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\alpha z-a)^2} \int_0^{\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta}} \{(a\beta-\alpha b)x+a\gamma-\alpha c\} F(y)\,dy$$

$$+\int_{\frac{a\xi+c}{\alpha\xi+\gamma}}^{\frac{a\xi+b\eta+c}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\beta z-b)^2} \int_{\frac{b\gamma-\beta c}{a\beta-\alpha b}}^{\xi} \{(\alpha b-a\beta)x+b\gamma-\beta c\} F(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{b\eta+c}{\beta\eta+\gamma}}^{\frac{a\xi+b\eta+c}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma}} \frac{f(z)\,dz}{(\alpha z-a)^2} \int_{\frac{a\gamma-\alpha c}{\alpha b-a\beta}}^{\varphi(z)} \{(a\beta-\alpha b)+a\gamma-\alpha c\} F(y)\,dy.$$

Diese Formel wird durchaus symmetrisch, wenn man $\chi(x)=\chi(0)=\eta$, also auch $\varphi(z)=\eta$ setzt.

Wenn das Argument die in den (§. 22. und 23.) vorausgesetzte Form hat, so findet sich in gleicher Weise die verallgemeinerte Formel

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(ax^2+2bxy+cy^2).F(x,y)\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{a\xi^2} f(z)\,dz \int_0^{\sqrt{\frac{z}{a}}} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{(cz+(b^2-ac)x^2)}} + \tfrac{1}{2}\int_0^{c\chi(0)^2} f(z)\,dz \int_0^{\sqrt{\frac{z}{c}}} \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{(az+(b^2-ac)y^2)}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{a\xi^2}^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z)\left\{\int_0^{\xi} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{(cz+(b^2-ac)x^2)}} + \int_{\sqrt{\frac{z}{a}}}^{\xi} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{(cz+(b^2-ac)x^2)}}\right\} dz$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{c\chi(0)^2}^{a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2} f(z)\left\{\int_0^{\varphi(z)} \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{(az+(b^2-ac)y^2)}} + \int_{\sqrt{\frac{z}{c}}}^{\varphi(z)} \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{(az+(b^2-ac)y^2)}}\right\} dz;$$

wo zur Abkürzung

$$F(x) = F\left(x, \frac{-bx+\sqrt{(cz+(b^2-ac)x^2)}}{c}\right),$$

$$F(y) = F\left(\frac{-by+\sqrt{(az+(b^2-ac)y^2)}}{a}, y\right)$$

gesetzt wurde und $\varphi(z)$ die Wurzel der Gleichung

$$y-\chi\left(\frac{-by+\sqrt{(az+(b^2-ac)y^2)}}{a}\right) = 0$$

ist. Wenn $\chi(x)$ constant, also $\varphi(z)=\eta$ ist, so wird auch diese Formel vollkommen symmetrisch.

Aehnliche Formeln für die Transformation der Doppel-Integrale findet man für die übrigen bis jetzt betrachteten Ausdrücke von z. Ich mufs mich jedoch hier auf das oben Mitgetheilte beschränken.

43.

Es sei

$$z = ay^2+2by\cos x+c.$$

Da diese Form bis jetzt nicht betrachtet wurde, so mag Folgendes vorausgehen.

Bezeichnet n irgend eine positive, ganze Zahl, so wird die Ordinate z (Fig. 6.) ein Minimum, wenn man

$$\text{entweder}\quad x_0 = \pm(2n+1)\pi,\quad y_0 = +\frac{b}{a},$$

$$\text{oder}\quad x_0 = \pm 2n\pi,\quad y_0 = -\frac{b}{a}$$

setzt. Maxima finden nicht Statt. Die Minimumwerthe sind einander gleich, und zwar ist jeder

$$z_0 = \frac{ac-b^2}{a}.$$

Für $z=c$ erhält man eine *gerade Linie,* deren Projection mit der x Axe zusammenfällt, und zugleich eine *Curve,* deren Gleichung

$$y = -2\frac{b}{a}\cos x$$

ist. Diese Curve, welche insbesondere zu bemerken ist, hat ein Maximum $y = +2\frac{b}{a}$ für $x = \pm(2n+1)\pi$, und ein Minimum $y = -2\frac{b}{a}$ für $x = \pm 2n\pi$. Sie durchschneidet die x Axe, wenn $x = \pm(2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist. Zwischen der Curve und der x Axe kommen nur geschlossene Curven vor, und diese reduciren sich zuletzt auf einzelne Puncte. Aufserhalb derselben befinden sich periodisch fortlaufende Curven, welche sich mit wachsendem z stets mehr von der x Axe entfernen und in abnehmenden Schwankungen in Curven übergehen, deren Gleichung sich nahezu durch

$$y = -\frac{b\cos x}{a}\pm\sqrt{\frac{z}{a}}$$

ausdrücken läfst.

Dies vorausgesetzt, wollen wir nun

$$F(x,y) = \sin x$$

setzen. Dann ist

$$dS = \pm\tfrac{1}{2}(dz)\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{((z-c)a+b^2\cos x^2)}},$$

also

$$dS = +\frac{dz}{2b}\{\log[-b\cos x\pm\sqrt{((z-c)a+b^2\cos x^2)}]+\text{Const.}\}.$$

Die Bestimmung der Werthe, zwischen welchen dS für eine gegebene Curve $y=\chi(x)$ zu nehmen ist, hat mit Rücksicht auf die obigen Andeutungen keine Schwierigkeit und setzt nur die Auflösung der Gleichung

$$a\chi(x)^2+2b\chi(x)\cos x+c-z = 0$$

voraus.

Auch die Grenzen der Integration nach z lassen sich leicht finden.

Wir betrachten jedoch hier den speciellen Fall

$$\xi=\pi \quad\text{und}\quad \chi(x)=\eta>2\frac{b}{a}.$$

Für die geschlossenen Curven besteht dS aus zwei einander gleichen Theilen. Die Grenzen nach x werden für einen solchen Theil durch

$$b\cos x = -\sqrt{((c-z)a)}, \qquad x=\pi$$

bestimmt. Wenn man also den entsprechenden Werth von dS verdoppelt und die gehörigen Zeichen nimmt, so ist jener erste Theil des Doppel-Integrals

$$\frac{1}{2b}\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^{c} f(z)\log\frac{b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{b-\sqrt{(az+b^2-ac)}}\cdot dz.$$

Für den Theil, welcher den bis zur Ordinate η sich erstreckenden Curven entspricht, sind die Grenzen nach x:

$$0, \qquad \pi,$$

und nach z:

$$0,\quad a\eta^2-2b\eta+c.$$

Folglich ist der zweite Bestandtheil

$$\frac{1}{2b}\int_{c}^{a\eta^2-2b\eta+c} f(z)\log\frac{+b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{-b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}\cdot dz.$$

Endlich sind, wie leicht zu sehen, für den dritten Theil die Grenzen nach x durch

$$0 \quad\text{und}\quad \cos x = \frac{z-c-a\eta^2}{2b\eta}$$

gegeben und es ist die Integration nach z

$$\text{von}\quad a\eta^2-2b\eta+c \quad\text{bis}\quad a\eta^2+2b\eta+c$$

zu erstrecken, so dafs jener dritte Theil

$$=\frac{1}{2b}\int_{a\eta^2-2b\eta+c}^{a\eta^2+2b\eta+c} f(z)\log\frac{b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{z-c}\eta.dz$$

wird.

Nach einigen leichten Umformungen findet sich

$$\int_0^\pi dx\int_0^\eta f(ay^2+2by\cos x+c).\sin x\,dy$$

$$=\frac{1}{4b}\Big\{\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^{a\eta^2-2b\eta+c} f(z)\log\Big(\frac{b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{b-\sqrt{(az+b^2-ac)}}\Big)^2 dz$$

$$+\int_{a\eta^2-2b\eta+c}^{a\eta^2+2b\eta+c} f(z)\log\Big(\frac{b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{z-c}\eta\Big)^2 dz\Big\}.$$

Wenn $f(z)$ für $z=\infty$ verschwindet und $\eta=\infty$ gesetzt wird, ergiebt sich hieraus

$$\int_0^\pi dx\int_0^\infty f(ay^2+2by\cos x+c).\sin x\,dy=\frac{1}{4b}\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^\infty f(z)\log\Big(\frac{b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{b-\sqrt{(az-b^2-ac)}}\Big)^2 dz.$$

Ist hier $a=1$, $b=r$, $c=r^2$, so erhält man

$$\int_0^\pi dx\int_0^\infty f(y^2+2ry\cos x+r^2)\sin x\,dy=\frac{1}{4r}\int_0^\infty f(z)\log\Big(\frac{r+\sqrt{z}}{r-\sqrt{z}}\Big)^2 dz.$$

Wir fügen noch hinzu, dafs, wenn man das Doppel-Integral auf den Raum der geschlossenen Curven beschränkt,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\int_0^{2\frac{b}{a}\sin x} f(ay^2-2by\sin x+c)\cos x\,dy$$

$$=\frac{1}{4b}\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^c f(z)\log\Big(\frac{b+\sqrt{(az+b^2-ac)}}{b-\sqrt{(az+b^2-ac)}}\Big)^2.dz$$

ist; woraus für die obigen Werthe für a, b, c

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\int_0^{2r\sin x} f(y^2-2ry\sin x+r^2)\cos x\,dy=\frac{1}{4r}\int_0^{r^2} f(z)\log\Big(\frac{r+\sqrt{z}}{r-\sqrt{z}}\Big)^2 dz$$

folgt.

44.

Es sei für denselben Ausdruck von z:

$$F(x)=\cos x,$$

so wird

$$dS=\pm\tfrac{1}{2}dz\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{((z-c)a+b^2\cos x^2)}}$$

oder

$$dS = \pm\frac{dz}{2b}\left\{\arcsin\frac{b\sin x}{\sqrt{(az+b^2-ac)}}+\text{Const.}\right\}.$$

Beschränkt man sich auch hier auf den Fall

$$\xi = \pi, \qquad \chi(x) = \eta,$$

so bleiben die Grenzen nach x und z dieselben wie im vorigen Paragraph und man erhält für den ersten, auf die geschlossenen Curven sich beziehenden Theil des Doppel-Integrals:

$$-\frac{\pi}{2b}\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^{c} f(z)\,dz.$$

Der zweite Theil wird Null, der dritte aber

$$\frac{1}{2b}\int_{a\eta^2-2b\eta+c}^{a\eta^2+2b\eta+c} f(z)\arccos\frac{z-c+a\eta^2}{2\eta\sqrt{(az+b^2-ac)}}\,.\,dz.$$

Man erhält also die Gleichung

$$\int_0^\pi dx\int_0^\eta f(ay^2+2by\cos x+c)\,.\cos x\,dy$$
$$= -\frac{\pi}{2b}\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^{c} f(z)\,dz+\frac{1}{2b}\int_{a\eta^2-2b\eta+c}^{a\eta^2+2b\eta+c} f(z)\arccos\frac{z-c+a\eta^2}{2\eta\sqrt{(az+b^2-ac)}}\,dz;$$

wo ebenfalls $\eta > 2\frac{b}{a}$ angenommen ist.

Nähert sich $f(z)$ für $z=\infty$ der Null, so findet man hieraus

$$(1.)\quad \int_0^\pi dx\int_0^\infty f(ay^2+2by\cos x+c)\,.\cos x\,dy = \frac{\pi}{2b}\int_c^{\frac{ac-b^2}{a}} f(z)\,dz,$$

und für $a=1$, $b=-r$, $c=r^2$:

$$\int_0^\pi dx\int_0^\infty f(y^2-2ry\cos x+r^2)\,.\cos x\,dy = \frac{\pi}{2r}\int_0^{r^2} f(z)\,dz.$$

Auch ergiebt sich

$$\int_0^\pi dx\int_0^\infty\frac{\cos x\,dy}{ay^2+2by\cos x+c} = \frac{\pi}{2b}\log\frac{ac-b^2}{ac},$$

oder, wenn man die Integration nach y unbestimmt ausführt und reducirt:

$$\int_0^\pi\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{(ac-b^2\cos x^2)}}\operatorname{arctang}\frac{b\cos x}{\sqrt{(ac-b^2\cos x^2)}} = \frac{\pi}{2b}\log\frac{ac}{ac-b^2}.$$

Führt man dagegen zuerst die Integration nach x aus, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty\frac{dy}{y}\left\{1-\frac{ay^2+c}{\sqrt{(a^2y^4+2(ac-2b^2)y^2+c^2)}}\right\} = \log\frac{ac-b^2}{ac}.$$

Daraus erhält man z. B.

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(1-\frac{y^2+1}{\sqrt{(y^4+1)}}\right) = -\log 2.$$

Beschränkt man das Doppel-Integral auf den Raum der geschlossenen Curven, so findet sich nach einigen Transformationen:

$$(2.) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \int_0^{2\frac{b}{a}\sin x} f(ay^2-2by\sin x+c).\sin x\, dy = \frac{\pi}{2b}\int_{\frac{ac-b^2}{a}}^{c} f(z)\, dz$$

Wir fügen noch hinzu, dafs die Verbindung der Gleichungen (1. und 2.) zu der bemerkenswerthen Relation führt:

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^\infty f(ay^2+2by\cos x+c).\cos x\, dy$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \int_0^{2\frac{b}{a}\sin x} f(ay^2-2by\sin x+c)\sin x\, dy.$$

Schliefslich ist zu bemerken, dafs sich leicht auch folgende Formel findet:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \int_0^\infty f(ay^2+2by\cos x+c).\cos x\, dy = \frac{1}{2b}\int_c^\infty f(z)\operatorname{arctang}\frac{b}{\sqrt{(a(z-c))}}.dz$$

u. s. f.

Diese Ergebnisse sind wieder nur einzelne Fälle einer allgemeinen Reductionsformel, bei welcher z durch die Gleichung

$$(Pz-p)\cos x+Qz-q = 0$$

gegeben und sodann

$$F(x,y) = R\cos x^m \sin x^{2n+1}$$

ist, und wo P, Q, R, p, q rationale Functionen von y, m und n aber zwei positive oder negative ganze Zahlen sind. Der Raum gestattet die Mittheilung der Resultate nicht.

45.

Man setze, es sei

$$z = a\cos x+b\sin x\cos y+c\sin x\sin y,$$

so hat die entsprechende krumme Fläche (Fig. 7.) in allen Puncten Maxima und Minima, für welche

$$\cos x_0 = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}, \qquad \sin x_0 = \sqrt{\left(\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)},$$

$$\cos y_0 = \frac{b}{\sqrt{(b^2+c^2)}}, \qquad \sin y_0 = \frac{c}{\sqrt{(b^2+c^2)}}$$

und diese die Maximum- und Minimumwerthe selbst sind

$$z_0 = \pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}.$$

Die für $\cos x_0$, $\cos y_0$, ... angegebenen Werthe müssen ebenfalls doppelte Zeichen bekommen; jedoch sind nur die folgenden Zeichenverbindungen zulässlich:

		Maxima		*Minima*	
$\cos x_0$	...	+	+	−	−
$\cos x_0$	...	+	−	−	−
$\cos x_0$	...	+	−	−	−
$\cos x_0$	...	+	−	−	+

Für alle zwischen $\pm z_0$ und $\pm a$ liegenden Werthe von z erhält man geschlossene Curven. Für $z = \pm a$ ergeben sich *gerade Linien*, welche, mit der y Axe parallel, durch die Puncte $x = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... gehen; und außer diesen noch unendlich viele *Curven*, deren Gleichung

$$\pm a = a\cos x + b\sin x\cos y + c\sin x\sin y$$

ist. Diese Curven sind insbesondere zu bemerken. Zwischen ihnen und den mit der y Axe parallelen geraden Linien, für welche $z = \pm a$ wird, befinden sich die bezeichneten geschlossenen Curven. Für alle zwischen $-a$ und $+a$ liegenden Werthe von z ergeben sich periodisch nach der Richtung der y Axe fortlaufende Curven. Ferner ist leicht zu sehen, dass die durch die Puncte (x_0, y_0) gehenden und mit der x Axe parallelen Geraden Symmetrie-Axen sämmtlicher Curven sind.

Dies vorausgesetzt, lassen sich nun viele Formen von $F(x,y)$ angeben, für welche dS eine endliche Form bekommt. Eine derselben ist z. B.

$$\cos x^m \sin x^n \cos y^\mu \sin y^\nu,$$

wenn die Exponenten ganze Zahlen sind und $n-\mu-\nu$ die Form $2k+1$ hat, wo k irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist; die Null mit einbegriffen. Wir beschränken uns auf einige besondere Fälle.

Es sei $m = \mu = \nu = 0$ und $n = 1$, so ist

$$dS = \pm dz \int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{(-(a^2+b^2+c^2)\cos x^2 + 2az\cos x + b^2+c^2-z^2)}},$$

also

$$dS = \pm \frac{dz}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \left\{\arcsin \frac{az-(a^2+b^2+c^2)\cos x}{\sqrt{(b^2+c^2)}\sqrt{(a^2+b^2+c^2-z^2)}} + \text{Const.}\right\}.$$

Die Bestimmung der Werthe von x und z, zwischen welchen dieser Ausdruck für eine gegebene obere Grenze $\chi(x)$ zu nehmen ist, hat, wie in

den vorhergehenden analogen Fällen, keine Schwierigkeit und setzt nur die Auflösung der Gleichung

$$a\cos x + b\sin x\cos\chi(x) + c\sin x\sin\chi(x) - z = 0$$

voraus. Hieraus erhellet, dafs das Doppel-Integral, zwischen irgend diesen oder jenen veränderlichen Grenzen, stets auf Quadraturen gebracht werden kann; desgleichen in welcher Art dies geschehen mufs; was, soviel mir bekannt, noch nicht auf diese Weise bemerkt wurde. Die allgemeinen Formeln aber werden, selbst in dem vorliegenden Falle, sehr weitläuftig und finden hier nicht Raum.

46.

Wir betrachten nur den besondern Fall, in welchem

$$\xi = \pi, \qquad \chi(x) = 2\pi$$

ist. Die Rechnung wird wesentlich abgekürzt, wenn man erwägt, dafs sich die Summe der Elemente, welche das Doppel-Integral innerhalb dieser Grenzen umfafst, auch ergiebt, wenn man dasselbe nach y, statt es zwischen 0 und 2π zu nehmen, auf das Intervall zweier auf einander folgenden Symmetrie-Axen, also von y_0 bis $y_0+\pi$ ausdehnt und dann verdoppelt. Die Abscissen x der Durchschnittspuncte dieser Axen und der Curven, sowohl der geschlossenen, als der periodisch fortlaufenden, werden durch die Gleichung

$$\cos x = \frac{az \pm \sqrt{(b^2+c^2)}\sqrt{(a^2+b^2+c^2-z^2)}}{a^2+b^2+c^2}$$

bestimmt. Nach der obigen Bemerkung ist also

$$\int_0^\pi dx \int_0^{2\pi} f(z).\sin x\, dy = 2\int_0^\pi dx \int_{y_0}^{y_0+\pi} f(z)\sin x\, dy,$$

und man erhält für die zwischen y_0 und $y_0+\pi$ liegenden Theile jener beiden Arten von Curven durchgehends denselben Werth von dS, nämlich

$$\frac{\pi\, dz}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

Dieser Ausdruck, mit $f(z)$ multiplicirt und dann nach z zwischen den beiden äufsersten Werthen $\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$ integrirt, giebt also die Gleichung

$$\int_0^\pi dx \int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x\cos y + c\sin x\sin y)\, dy$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \int_{-\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}^{+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} f(z)\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^\pi f(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}.\cos x).\sin x\, dx;$$

welche Gleichung zuerst von *Poisson* (1819) gefunden wurde.

Beschränkt man sich auf die erste Gruppe geschlossener Curven, und bezeichnet zur Abkürzung die beiden Werthe

$$\frac{ab\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x \pm c\sqrt{(b^2+c^2-a^2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x^2)}}{b^2+c^2}$$

bezüglich mit $\cos y_1$ und $\cos y_2$, so ergiebt sich

$$\int_0^{\pi} dx \int_{y_1}^{y_2} f(a\cos x + b\sin x\cos y + c\sin x\sin y).\sin x\,dy$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \int_a^{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} f(z)\,dz.$$

Für $a=0$ findet sich hieraus

$$\int_0^{\pi} dx \int_{-\arccos\left(\frac{c}{\sqrt{(b^2+c^2)}}\right)}^{+\arccos\left(\frac{-c}{\sqrt{(b^2+c^2)}}\right)} f\{\sin x(b\cos y + c\sin y)\}\sin x\,dy$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(b^2+c^2)}} \int_0^{\sqrt{(b^2+c^2)}} f(z)\,dz.$$

Ist endlich noch $b=0$, $c=1$, so erhält man

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} f(\sin x\sin y).\sin x.dy = 2\pi \int_0^1 f(z)\,dz;$$

wie leicht auch direct zu finden ist.

47.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Doppel-Integrale reduciren, in welchen z einen der Ausdrücke

$$\frac{a\sin x + b}{\alpha\cos x + \beta}, \quad \frac{ay\sin x + b}{\alpha y\cos x + \beta},$$

oder $(a\sin x + b)(\alpha\sin y + \beta)$, verbunden mit $F(x,y) = \cos x^m \sin x^n \cos y^\mu \sin y^\nu$,

oder $\dfrac{a\sin x + b\sin y + c}{\alpha\sin x + \beta\sin y + \gamma}$ - - - - - -

u. s. f. bezeichnet, wo m, n, μ, ν ganze Zahlen sind und m oder μ von der Form $2k+1$ ist. Die Anzahl solcher Fälle ist unbegrenzt.

Die bisher entwickelten Resultate, welche der Aufmerksamkeit des Lesers zu empfehlen sein dürften, scheinen den Nutzen des Verfahrens, durch welches sie erlangt wurden, hinreichend darzuthun. Weitere solche Ergebnisse, so wie die Reductionsformeln, welche ich für *dreifache Integrale* gefunden habe, wird die nächste Abhandlung enthalten.

Carlsruhe, 1851.

8.
Transformation dreifacher Integrale durch Änderung der Integrationsfolge.

(Von Herrn Dr. *A. Winckler*, Grofsherzoglich-Badischem Ingenieur zu Carlsruhe.)

Für mehrfache Integrale zwischen *constanten* Grenzen gewährt schon die blofse Vertauschung der Integrations-Veränderlichen eine der fruchtbarsten und, da sie die gegebene Function ganz unverändert läfst, eine der einfachsten Transformationen. Sind die Grenzen *veränderlich*, so giebt es, wie bekannt, mehrere Methoden, dieselben in constante zu verwandeln, so dafs die Integrationsfolge auch in diesem Falle willkürlich ist. Die Function unter den Integralzeichen bleibt aber dann nicht mehr dieselbe, sondern erfährt Veränderungen, welche von dem angewendeten Verfahren abhängig sind.

Von besonderem Interesse scheint die Aufstellung von Regeln zu sein, welche, wenn man ihnen folgt, es gestatten, bei Integralen zwischen *veränderlichen* Grenzen, ganz wie bei Integralen zwischen *constanten* Grenzen, eine beliebige Aufeinanderfolge der Veränderlichen festzusetzen, ohne dafs die Function unter den Integralzeichen davon auf irgend eine Weise berührt würde. Für doppelte Integrale habe ich diese Aufgabe früher gelöset. Hier soll es für *dreifache* Integrale möglichst allgemein geschehen.

Die Regeln, welche sich ergeben werden, sind zwar, schon wegen der in den Grenzwerthen liegenden Allgemeinheit, nicht in allen Fällen sehr einfach; indessen scheint die zu Grunde liegende Transformation, weil keinerlei willkürliche Bestimmungen darin eingehen und die Aufgabe sich unmittelbar darbietet, elementar zu sein und deshalb den andern Methoden vorgehen zu müssen.

Der allgemeinste Ausdruck eines dreifachen Integrals zwischen veränderlichen Grenzen läfst sich, wie bekannt, in *acht* andere Integrale zerlegen, deren jedes mit Null anfängt und welche daher insgesammt von der Form

$$(1.)\quad \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

sind. Mit dieser Form werden wir uns beschäftigen, aber, um den Gang der Entwickelung nicht zu unterbrechen, voraussetzen, dafs überall wo Unstetig-

keiten oder mehrförmige Ausdrücke noch andere Betrachtungen erfordern, die in Rede kommenden Functionen, soweit sie in das Bereich der Integration fallen, stetig und einförmig sein sollen.

Unter dem dreifachen Integrale (1.) stelle man sich einen Raum vor, welcher von drei rechtwinkligen Coordinaten-Ebenen einer krummen Fläche, deren Gleichung $z=\theta(x,y)$ ist, einer Cylinderfläche, deren Gleichung $y=\chi(x)$ und einer mit yz parallelen Ebene, welche die x Axe in der Entfernung ξ schneidet, begrenzt wird, und in welchem eine *Masse* verbreitet ist, deren *Dichtigkeit* $=f(x,y,z)$ in jedem Puncte einen andern Werth hat. Durch diese Vorstellung wird die Betrachtung einfacher, als die rein analytische; denn es wird dadurch jede Integrationsfolge einfach nur zu einer andern Art der Theilung eines gegebenen Raums.

Zur schrittweisen Ausführung der Integration giebt es für ein dreifaches Integral $1.2.3=6$ verschiedene Anordnungen, d. h. geometrisch gesprochen: wenn man die Integration nach einer der drei Axen zur ersten macht, so können die Integrationen nach den beiden andern Axen auf zweierlei Weise angeordnet werden.

Dies reicht hin, ohne Schwierigkeit die gewünschten Transformationen ausführen zu können.

1.

Wie bei (1.) sei z die Variable der ersten Integration, aber x die der zweiten. Der Zerlegung des Raums in zwei Theile, deren einer ein Rechteck, der andere ein krummlinig begrenztes Dreieck in der xy Ebene zur Basis hat, entspricht die Trennung des dreifachen Integrals in zwei andere, deren Grenzen beziehlich

(1.) Nach z von 0 bis $\theta(x,y)$; nach x von 0 bis ξ; nach y von 0 bis $\chi(\xi)$
(2.) - - 0 - $\theta(x,y)$; - - 0 - $\lambda(y)$; - - $\chi(\xi)$ - $\chi(0)$

sich erstrecken und wo

$$x=\lambda(y) \text{ aus der Gleichung } y=\chi(x)$$

zu nehmen ist. Man erhält also folgende Transformationsgleichung:

$$(2.)\quad \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$
$$=\int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\xi} dx \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz - \int_{\chi(0)}^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\lambda(y)} dx \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz;$$

auf welche es ankam.

2.

Nimmt man jetzt an, die erste Integration beziehe sich auf die Veränderliche y, die zweite auf z, so entspricht dieser Anordnung ebenfalls eine Zerlegung des Raums in zwei Theile. Sie sind aber jetzt durch eine cylinderische Fläche von einander geschieden, deren Erzeugungslinien, mit der y Axe parallel, die xz Ebene nach einer Curve schneiden, deren Gleichung $z=\theta(x,\chi(x))$ ist. Die beiden entsprechenden Integrale sind

(1.)	Nach y von 0 bis $\chi(x)$;	nach z von 0 bis $\theta(x,\chi(x))$;	nach x von 0 bis ξ,
(2.)	- - 0 - $\psi(x,z)$;	- - $\theta(x,\chi(x))$ - $\theta(x,0)$;	- - 0 - ξ

zu nehmen, wo $y=\psi(x,z)$ aus der Gleichung $z=\theta(x,y)$ abzuleiten ist. Demnach findet sich die Gleichung

$$(3.)\quad \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_0^{\xi} dx \int_0^{\theta(x,\chi(x))} dz \int_0^{\chi(x)} f(x,y,z)\,dy + \int_0^{\xi} dx \int_{\theta(x,\chi(x))}^{\theta(x,0)} dz \int_0^{\psi(x,z)} f(x,y,z)\,dy.$$

Soll wieder y die erste und dagegen x die zweite Integrationsveränderliche sein, so nimmt das Resultat eine etwas weitläuftigere Gestalt an. Das Volumen (Taf. IV. Fig. 1.) ist alsdann in fünf Theile zu zerlegen, die sich ergeben, wenn man zunächst, wie im vorigen Falle, die Cylinderfläche $z=\theta(x,\chi(x))$ construirt, dann durch die Puncte

$$\{\xi,\chi(\xi),\theta(\xi,\chi(\xi))\},\quad \{\xi,0,\theta(\xi,0)\},\quad \{0,\chi(0),\theta(0,\chi(0))\}$$

Ebenen parallel mit xy legt und die Durchschnittslinien fixirt, welche die beiden letzteren Ebenen mit der Cylinderfläche bilden. Die Grenzen der einzelnen Integrale sind

(1.)	Nach y von 0 bis $\chi(x)$;	nach x von 0 bis ξ;	nach z von 0 bis $\theta(\xi,\chi(\xi))$,
(2.)	- - 0 - $\chi(x)$;	- - 0 - $\pi(z)$;	- - $\theta(\xi,\chi(\xi))$ - $\theta(0,\chi(0))$,
(3.)	- - 0 - $\psi(x,z)$;	- - $\pi(z)$ - ξ;	- - $\theta(\xi,\chi(\xi))$ - $\theta(\xi,0)$,
(4.)	- - 0 - $\psi(x,z)$;	- - $\pi(z)$ - $\varphi(0,z)$;	- - $\theta(\xi,0)$ - $\theta(0,\chi(0))$,
(5.)	- - 0 - $\psi(x,z)$;	- - 0 - $\varphi(0,z)$;	- - $\theta(0,\chi(0))$ - $\theta(0,0)$

zu erstrecken, wo

$$x=\pi(z) \text{ aus der Gleichung } z=\theta(x,\chi(x))$$

und

$$x=\varphi(0,z) \text{ aus der Gleichung } z=\theta(x,0)$$

zu nehmen ist.

Diese Transformation giebt also folgende Formel:

$$(4.)\quad \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$=\int_0^{\theta(\xi,\chi(\xi))} dz \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} f(x,y,z)\,dy + \int_{\theta(\xi,\chi(\xi))}^{\theta(0,\chi(0))} dz \int_0^{\pi(z)} dx \int_0^{\chi(x)} f(x,y,z)\,dy$$

$$+\int_{\theta(\xi,\chi(\xi))}^{\theta(\xi,0)} dz \int_{\pi(z)}^{\xi} dx \int_0^{\psi(x,z)} f(x,y,z)\,dy + \int_{\theta(\xi,0)}^{\theta(0,\chi(0))} dz \int_{\pi(z)}^{\varphi(0,z)} dx \int_0^{\psi(x,z)} f(x,y,z)\,dy$$

$$+\int_{\theta(0,\chi(0))}^{\theta(0,0)} dz \int_0^{\varphi(0,z)} dx \int_0^{\psi(x,z)} f(x,y,z)\,dy;$$

durch welche die Aufgabe im Allgemeinen gelöset ist.

3.

Es sind noch die beiden Fälle übrig, in welchen die erste Integration sich auf die Variable x bezieht.

Es sei zunächst z die Veränderliche der zweiten Integration. Dann mufs das dreifache Integral aus drei Bestandtheilen zusammengesetzt werden. Die Trennungsflächen (Fig. 2.) der entsprechenden Theile des Volumens ergeben sich, wenn man durch die Curve $z=\theta(\xi,y)$ eine cylindrische Fläche legt, deren Erzeugungslinien mit der x Axe parallel sind, und aufserdem durch den Punct $(\xi,\chi(\xi))$, parallel mit xz, eine Ebene.

Die Grenzen der diesen drei Räumen entsprechenden Integrale sind

(1.)	Nach x von 0 bis ξ;	nach z von 0 bis $\theta(\xi,y)$;	nach y von 0 bis $\chi(\xi)$,
(2.)	- - 0 - $\varphi(y,z)$;	- - $\theta(\xi,y)$ - $\theta(0,y)$;	- - 0 - $\chi(\xi)$,
(3.)	- - 0 - $\lambda(y)$;	- - 0 - $\theta(\lambda(y),y)$;	- - $\chi(\xi)$ - $\chi(0)$

auszudehnen, wo $x=\varphi(y,z)$ die Auflösung der Gleichung $z=\theta(x,y)$ darstellt.

Dies vorausgesetzt, ergiebt sich für die verlangte Transformation die Gleichung

$$5.\quad \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$=\int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\theta(\xi,y)} dz \int_0^{\xi} f(x,y,z)\,dx + \int_0^{\chi(\xi)} dy \int_{\theta(\xi,y)}^{\theta(0,y)} dz \int_0^{\varphi(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

$$+\int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)} dy \int_0^{\theta(\lambda(y),y)} dz \int_0^{\lambda(y)} f(x,y,z)\,dx.$$

Soll x die Veränderliche der ersten Integration bleiben, dagegen y zu der der zweiten werden, so nimmt die Gleichung eine weitläuftigere Form an; denn das dreifache Integral ist dann bei der Aufeinanderfolge der Inte-

grationen in neun andere Integrale zu zerlegen. Die denselben entsprechenden räumlichen Bestandtheile erhält man, wenn man sich, aufser den im vorigen Falle bezeichneten Theilungsflächen, noch vier auf xy (Fig. 3.) parallele Ebenen vorstellt, welche durch die Puncte

$\{\xi,\chi)\xi),\theta(\xi,\chi(\xi))\}$, $\{\xi,0,\theta(\xi,0)\}$, $\{0,\chi(0),\theta(0,\chi(0))\}$, $\{0,\chi(\xi),\theta(0,\chi(\xi))\}$

gehen; und dann eine cylinderische Fläche, deren Erzeugungslinien, mit der x Axe parallel, insgesammt durch die Curve gehen, deren Gleichung

$z = \theta(\lambda(y),y)$ ist.

Die Bestimmung der Lage der neun Raumtheile hat alsdann keine Schwierigkeit, und es genügt, zu bemerken, dafs die entsprechenden Integrale wie folgt zu nehmen sind:

(1.)	Nach x von	0	bis ξ;	nach y von	0	bis $\chi(\xi)$;	nach z von	0	bis $\theta(\xi,\chi(0))$,
(2.)	- -	0	- ξ;	- -	0	- $\psi(\xi,z)$;	- -	$\theta(\xi,\chi(\xi))$	- $\theta(\xi,0)$,
(3.)	- -	0	- $\varphi(y,z)$;	- -	$\psi(\xi,z)$	- $\chi(\xi)$;	- -	$\theta(\xi,\chi(\xi))$	- $\theta(\xi,0)$,
(4.)	- -	0	- $\varphi(y,z)$;	- -	0	- $\chi(\xi)$;	- -	$\theta(\xi,0)$	- $\theta(0,\chi(\xi))$,
(5.)	- -	0	- $\varphi(y,z)$;	- -	0	- $\psi(0,z)$;	- -	$\theta(0,\chi(\xi))$	- $\theta(0,0)$,
(6.)	- -	0	- $\lambda(y)$;	- -	$\chi(\xi)$	- $\chi(0)$;	- -	0	- $\theta(\xi,\chi(\xi))$,
(7.)	- -	0	- $\lambda(y)$;	- -	$\varpi(z)$	- $\chi(0)$;	- -	$\theta(\xi,\chi(\xi))$	- $\theta(0,\chi(0))$,
(8.)	- -	0	- $\varphi(y,z)$;	- -	$\chi(\xi)$	- $\varpi(z)$;	- -	$\theta(\xi,\chi(\xi))$	- $\theta(0,\chi(0))$,
(9.)	- -	0	- $\varphi(y,z)$;	- -	$\chi(\xi)$	- $\psi(0,z)$;	- -	$\theta(0,\chi(0))$	- $\theta(0,\chi(\xi))$,

wo $y = \varpi(z)$ durch die Gleichung $z = \theta(\lambda(y),y)$ bestimmt wird.

Hieraus findet sich folgende Gleichung:

$$(6.)\quad \int_0^{\xi} dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_0^{\theta(\xi,\chi(\xi))} dz \int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\xi} f(x,y,z)\,dx + \int_{\theta(\xi,\chi(\xi))}^{\theta(\xi,0)} dz \int_0^{\psi(\xi,z)} dy \int_0^{\xi} f(x,y,z)\,dx$$

$$+ \int_{\theta(\xi,\chi(\xi))}^{\theta(\xi,0)} dz \int_{\psi(\xi,z)}^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\varphi(y,z)} f(x,y,z)\,dx + \int_{\theta(\xi,0)}^{\theta(0,\chi(\xi))} dz \int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\varphi(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

$$+ \int_{\theta(0,\chi(\xi))}^{\theta(0,0)} dz \int_0^{\psi(0,z)} dy \int_0^{\varphi(y,z)} f(x,y,z)\,dx + \int_0^{\theta(\xi,\chi(\xi))} dz \int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)} dy \int_0^{\lambda(y)} f(x,y,z)\,dx$$

$$+ \int_{\theta(\xi,\chi(\xi))}^{\theta(0,\chi(0))} dz \int_{\varpi(z)}^{\chi(0)} dy \int_0^{\lambda(y)} f(x,y,z)\,dx + \int_{\theta(\xi,\chi(\xi))}^{\theta(0,\chi(0))} dz \int_{\chi(\xi)}^{\varpi(z)} dy \int_0^{\varphi(y,z)} f(x,y,z)\,dx$$

$$+ \int_{\theta(0,\chi(0))}^{\theta(0,\chi(\xi))} dz \int_{\chi(\xi)}^{\psi(0,z)} dy \int_0^{\varphi(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

In diesen sechs Formeln ist die vollständige Lösung der Aufgabe enthalten.

4.

Man sieht leicht, dafs die *rein-analytische* Herleitung dieser Resultate manche, wenn auch nicht bedeutende Schwierigkeiten haben, jedenfalls aber weitläuftiger sein würde.

Aus den obigen Gleichungen lassen sich viele specielle Resultate, ähnlich denjenigen, welche ich früher bei den doppelten Integralen bemerklich machte, ableiten. Hier wollen wir uns auf die folgenden einfacheren Fälle beschränken.

1°. Wenn $\chi(x)=\eta$, $\theta(x,y)=\zeta$ *constant* ist, so fallen alle Glieder, mit Ausnahme jedesmal des ersten, weg, und es ergiebt sich der Satz, dafs für *constante* Grenzen die Integrationsfolge *willkürlich* ist.

2°. Es sei in der Formel (3.) die Function f *von* y *unabhängig*. In diesem Falle geht sie in

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}dy\int_0^{\theta(x,y)}f(x,z)\,dz$$
$$=\int_0^\xi \chi(x)\,dx\int_0^{\theta(x,\chi(x))}f(x,z)\,dz+\int_0^\xi dx\int_{\theta(x)\chi(x)}^{\theta(\chi,0)}f(x,z).\psi(x,z)\,dz$$

über.

3°. Ist in (5.) die Function f *von* x *unabhängig*, so erhält man

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}dy\int_0^{\theta(x,y)}f(y,z)\,dz$$
$$=\xi\int_0^{\chi(\xi)}dy\int_0^{\theta(\xi,y)}f(y,z)\,dz+\int_0^{\chi(\xi)}dy\int_{\theta(\xi,y)}^{\theta(0,y)}f(y,z)\,\varphi(y,z)\,dz$$
$$+\int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)}\lambda(y)\,dy\int_0^{\theta(\lambda(y),y)}f(y,z)\,dz+\int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)}dy\int_{\theta(\lambda(y),y)}^{\theta(0,y)}f(y,z).\varphi(y,z)\,dz.$$

4°. Enthält die Grenze θ nur die Veränderliche x, so folgt aus (4.):

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}dy\int_0^{\theta(x)}f(x,y,z)\,dz$$
$$=\int_0^{\theta(\xi)}dz\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}f(x,y,z)\,dy+\int_{\theta(\xi)}^{\theta(0)}dz\int_0^{\varphi(z)}dx\int_0^{\chi(x)}f(x,y,z)\,dy;$$

wo $x=\varphi(z)$ aus der Gleichung $z=\theta(x)$ zu nehmen ist.

5°. Enthält θ nur die Veränderliche y, so findet sich aus (5.):

$$\int_0^\xi dx\int_0^{\chi(x)}dy\int_0^{\theta(y)}f(x,y,z)\,dz$$
$$=\int_0^{\chi(\xi)}dy\int_0^{\theta(y)}dz\int_0^\xi f(x,y,z)\,dx+\int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)}dy\int_0^{\theta(y)}dz\int_0^{\lambda(y)}f(x,y,z)\,dx.$$

6°. Unter derselben Voraussetzung erhält man aus (6.):

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(y)} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \int_0^{\theta(\chi(\xi))} dz \int_0^{\chi(\xi)} dy \int_0^{\xi} f(x,y,z)\,dx + \int_{\theta(\chi(\xi))}^{\theta(0)} dz \int_0^{\psi(z)} dy \int_0^{\xi} f(x,y,z)\,dx$$

$$+ \int_0^{\theta(\chi(\xi))} dz \int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)} dy \int_0^{\lambda(y)} f(x,y,z)\,dx + \int_{\theta(\chi(\xi))}^{\theta(\chi(0))} dz \int_{\psi(z)}^{\chi(0)} dy \int_0^{\lambda(y)} f(x,y,z)\,dx,$$

wo $y = \psi(z)$ aus der Gleichung $z = \theta(y)$ sich ergiebt.

7°. Nimmt man an, in der eben gefundenen Gleichung sei die Function f von x unabhängig, so folgt

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\chi(x)} dy \int_0^{\theta(y)} f(y,z)\,dz$$

$$= \xi \int_0^{\theta(\chi(\xi))} dz \int_0^{\chi(\xi)} f(y,z)\,dy + \xi \int_{\theta(\chi(\xi))}^{\theta(0)} dz \int_0^{\psi(z)} f(y,z)\,dy$$

$$+ \int_0^{\theta(\chi(\xi))} dz \int_{\chi(\xi)}^{\chi(0)} f(y,z)\lambda(y)\,dy + \int_{\theta(\chi(\xi))}^{\theta(\chi(0))} dz \int_{\psi(z)}^{\chi(0)} f(y,z)\lambda(y)\,dy$$

U. s. w.

Stuttgart, den 3. August 1852.

9.

Notiz über einen elementaren Satz der Statik.

(Von dem Herrn Ingenieur Dr. *A. Winckler* zu Carlsruhe in Baden.)

Die systematische Darstellung der elementaren Statik, welche die Lehrbücher auf verschiedenen Wegen anstreben, würde, wie es scheint, wesentlich gefördert werden, wenn schon gleich im Anfange das allgemeine Gesetz der *virtuellen Momente* eingeführt und in den einzelnen Fällen begründet würde.

Die Möglichkeit davon ist leicht zu sehen. Es ergeben sich schon beim Parallelogramm der Kräfte die Sätze über die statischen und virtuellen Momente aus den Projectionen der Kräfte auf zwei senkrechte Axen, und es folgen daraus, fast ohne Weiteres, die Sätze über die parallelen Kräfte.

Bezeichnen nämlich P und Q zwei auf einen Punct wirkende Kräfte und R ihre Resultante; legt man durch jenen Punct eine gerade Linie, welche, etwa aufserhalb des Winkels (PQ) liegend, mit den Kräften P, Q, R resp. die Winkel a, b, c macht, und projicirt die Kräfte auf diese und auf eine darauf senkrechte Gerade, so findet sich unmittelbar:

$$R\sin c = P\sin a + Q\sin b,$$
$$R\cos c = P\cos a + Q\cos b.$$

Bezeichnet ferner δ die Entfernung eines auf jener Geraden angenommenen Punctes C vom Angriffspuncte A, und setzt man

$$\delta\sin a = p,\quad \delta\sin b = q,\quad \delta\sin c = r,$$
$$\delta\cos a = p',\quad \delta\cos b = q',\quad \delta\cos c = r',$$

so sind p, q, r die Hebels-Arme und p', q', r' die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte in Bezug auf den Punct C, welche mit den sin. und cos. der Winkel a, b, c gleiche Zeichen haben.

Dies vorausgesetzt, erhält man die Gleichungen

$$Rr = Pp + Qq,$$
$$Rr' = Pp' + Qq',$$
$$p^2 + p'^2 = q^2 + q'^2 = r^2 + r'^2,$$

durch welche die Resultante der Gröfse und Richtung nach bestimmt wird.

Hieraus ergeben sich nun auch die Gleichungen für die parallelen Kräfte, wenn man den Durchschnittspunct A der Richtungslinien der Kräfte auf CA, von C hinweg ins Unendliche fortrücken läfst, während die Kräfte P, Q und die Hebels-Arme unveränderlich bleiben, wogegen p', q', r', ohne Ende wachsend, stets mehr und mehr einander gleich werden.

Alsdann findet sich nemlich:

1. Wenn der Winkel $(PQ) < 90$ ist, aus

$$Rr' = Pp' + Qq' \text{ die Gleichung } R = P + Q.$$

(Die Gleichung für die statischen Momente bleibt, wie in den folgenden Fällen, unverändert.)

2. Wenn $(PQ) > 90$ und $P > Q$ ist, also R näher an P als an Q liegt, aus der diesem Falle entsprechenden Gleichung

$$Rr' = Pp' - Qq', \text{ die folgende: } R = P - Q.$$

3. Wenn $(PQ) > 90$ und $P = Q$ ist, also R den Winkel der beiden Seitenkräfte halbirt, aus der entsprechenden Gleichung

$$Rr' = Pp' - Pq', \text{ die Resultante } R = 0.$$

Der Angriffspunct dieser Mittleren, welche in einer auf der der beiden Seitenkräfte senkrechten Richtung wirkt, liegt im Unendlichen; ihr Werth ist Null und man sagt daher, zwei gleiche entgegengesetzte parallele Kräfte haben *keine* Mittelkraft. Ihr Moment aber behält stets den Werth $P(p+q)$.

Wie beim Parallelogramm, läfst sich das Verfahren auch auf beliebige Kräfte in einer Ebene, auf das Parallelepiped und auf beliebige im Raume wirkende Kräfte, allmälig fortschreitend, anwenden; was keiner weitern Ausführung bedarf.

Einen so einfachen Gegenstand berührt zu haben, möge der Umstand rechtfertigen, dafs auch *Poisson* in seine Mechanik (T. I. no. 43, 44, 50.) zwei verschiedene Herleitungen der obigen Sätze über die parallelen Kräfte aufgenommen hat.

Carlsruhe, den 12. November 1852.

10.

Lehrsätze.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

---

1. *„Zieht man aus den Ecken a, b, c eines gegebenen Dreiecks durch einen in seiner Ebene liegenden unbestimmten Punct p Strahlen, welche die Gegenseiten beziehlich in den Puncten a_1, b_1, c_1 treffen, und verlangt, es soll das Product*

$$ap \cdot bp \cdot cp = pa_1 \cdot pb_1 \cdot pc_1$$

sein, so ist der Ort des Puncts p diejenige dem Dreieck abc umgeschriebene Ellipse, welche den Schwerpunct desselben zum Mittelpunct hat."

Ist also insbesondere das Dreieck gleichseitig, so ist der Ort von p der umschriebene Kreis.

2. *„Werden durch irgend einen Punct p in der Ebene eines gegebenen Dreiseits ABC diejenigen drei Geraden rr_1, ss_1, tt_1 gezogen, welche beziehlich von den Seiten A und B, B und C, C und A begrenzt und durch den Punct p gehälftet werden, so liegen ihre drei Paar Endpuncte r, r_1; s, s_1; t, t_1 allemal in irgend einem Kegelschnitte C^2, welcher nothwendigerweise den Punct p zum Mittelpunct hat. Und zieht man ferner aus demselben Puncte p Strahlen α, β, γ nach den Ecken a, b, c des Dreiseits und construirt in jeder Ecke zu den zwei anliegenden Seiten und dem jedesmaligen Strahle den vierten, dem letztern zugeordneten, harmonischen Strahl, beziehlich α_1, β_1 und γ_1, so werden diese drei neuen Strahlen in den respectiven Ecken des Dreiecks allemal von einem solchen Kegelschnitte C_1^2 berührt, welcher jenem Kegelschnitte C^2 ähnlich ist und mit ihm ähnlich liegt, so dafs die sich entsprechenden Axen beider Kegelschnitte parallel, eben so ihre Asymptoten, falls sie Hyperbeln sind." — „Umgekehrt ist durch jeden dem Dreieck abc umgeschriebenen Kegelschnitt C_1^2 der Punct p, so wie der ihm zugehörige Kegelschnitt C^2 bestimmt. Somit giebt es nur einen Pol p, für welchen der zugehörige Kegelschnitt C^2 ein Kreis wird, oder bei welchem die drei Geraden rr_1, ss_1, tt_1 einander gleich werden; derselbe wird durch den dem Dreieck abc umgeschriebenen Kreis bestimmt."* Ferner:

„Sollen die Kegelschnitte C^2 und C_1^2 insbesondere gleichseitige Hyperbeln sein, so ist der Ort des Pols p eine bestimmte Gerade H; nämlich sind a_1, b_1, c_1 die Fufspuncte der aus den Ecken a, b, c auf die Gegenseiten A, B, C gefällten Perpendikel, so liegen die drei Schnitte der Geraden a_1b_1 und C, a_1c_1 und B, b_1c_1 und A in einer Geraden — und diese ist die genannte Gerade H." Und

„Soll insbesondere C_1^2 eine Parabel sein, so zerfällt C^2 in zwei Gerade, etwa rst und $r_1s_1t_1$, welche jedesmal der Parabel-Axe parallel sind und gleichweit vom Pol p abstehen. Für diesen Fall ist der Ort des Pols p diejenige Ellipse, welche die Seiten des gegebenen Dreiecks in ihren Mitten berührt und somit den Schwerpunct desselben zum Mittelpunct hat." U. s. w.

3. Bei allen einem Kegelschnitte C^2 eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecken *bac*, welche den Scheitel *a* des rechten Winkels gemein haben, gehen bekanntlich die Hypotenusen *bc* sämmtlich durch irgend einen bestimmten Punct *p*. Somit entspricht jedem Puncte *a* in C^2 auf diese Weise ein bestimmter Punct *p*. Über den Punct *p* und dessen Beziehung zu dem Puncte *a* ist unter andern folgendes Nähere anzugeben.

„Der Ort des Puncts p ist ein Kegelschnitt C_1^2, welcher dem gegebenen C^2 ähnlich und mit ihm ähnlichliegend und concentrisch ist; und zwar sind a und p stets symmetrische homologe Puncte beider Kegelschnitte in Bezug auf deren gemeinsame Haupt-Axe X; d. h. der Winkel zwischen den nach a und p gezogenen Halbmessern wird allemal durch die Axe X gehälftet." — Ferner: *„Sind α, β die Halb-Axen von C^2 und α_1, β_1 die Halb-Axen von C_1^2, so ist*

$$\alpha_1 = \alpha\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{und} \quad \beta_1 = \beta\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}, \quad \text{oder}$$

$$\alpha = \alpha_1\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{\alpha_1^2-\beta_1^2} \quad \text{und} \quad \beta = \beta_1\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{\alpha_1^2-\beta_1^2}.\text{"}$$

„Die in jedem Puncte p an C_1^2 gelegte Tangente bildet in C^2 eine Sehne b_1c_1, welche durch p gehälftet wird und gerade doppelt so grofs als die Gerade ap ist, so dafs der über b_1c_1 beschriebene Kreis den Kegelschnitt C^2 im entsprechenden Puncte a berührt; d. h. die gesammten Tangenten des C_1^2 geben in C^2 alle diejenigen Sehnen b_1c_1, welche Durchmesser solcher Kreise sind, die den C^2 berühren, und jedesmal berühren jene Tangente und dieser Kreis die beiden Kegelschnitte C_1^2 und C^2 in einem Paar sich

entsprechenden Puncten p und a." — Zieht man in C^2 eine beliebige Sehne bc, welche den C_1^2 in irgend zwei Puncten p schneidet, so schneidet der über derselben beschriebene Kreis den C^2 in den entsprechenden zwei Puncten a.

4. Die Mittelpuncte aller Kreise, welche in einer Ebene durch zwei feste Puncte a und a_1 gehen, oder die Sehne aa_1 gemein haben, liegen in einer die Sehne in ihrer Mitte, etwa a_0, rechtwinklig durchschneidenden Geraden AA_1. Die auf entgegengesetzten Seiten der Sehne liegenden Theile dieser Geraden bezeichne man durch A und A_1, und demgemäfs jeden Kreis durch A^2 oder A_1^2, je nachdem sein Mittelpunct in A oder A_1 liegt; der besondere Kreis aber, dessen Mittelpunct in a_0 liegt, oder welcher die Sehne aa_1 zum Durchmesser hat, heifse A_0^2. Eben so unterscheide man in Rücksicht irgend zweier andern festen Puncte b und b_1 die durch dieselben gehenden Kreise durch B^2 und B_1^2, und bezeichne den besondern Kreis, welcher bb_1 zum Durchmesser hat, durch B_0^2. Alsdann läfst sich ein Satz wie folgt aussprechen:

„*Sind in einer Ebene irgend zwei Sehnen aa_1 und bb_1 in beliebiger fester Lage gegeben und man beschreibt über denselben je ein Paar solcher Kreise A^2 und B^2, oder A_1^2 und B_1^2, deren Centriwinkel über den respectiven Sehnen einander gleich sind, so geht die gemeinschaftliche Secante (die Linie der gleichen Potenzen) jedes dieser Kreispaare stets durch einen und denselben bestimmten Punct p; und beschreibt man verwechselt je ein Paar solcher Kreise A^2 und B_1^2, oder A_1^2 und B^2, deren Centriwinkel über den Sehnen ebenfalls einander gleich sind, so geht die gemeinschaftliche Secante jedes dieser Kreispaare durch einen andern bestimmten Punct q; und diese beiden Puncte p und q liegen in der gemeinschaftlichen Secante der besondern Kreise A_0^2 und B_0^2.*"

5. Unter allen einem vollständigen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitten befindet sich nur eine Parabel P^2; sei c ihr Brennpunct und p, q, r, s ihre Berührungspuncte mit den Seiten des Vierseits. Seien ferner a und α die Brennpuncte irgend eines andern dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitts A^2, so wie p_1, q_1, r_1, s_1 die Berührungspuncte der aus denselben an die Parabel gezogenen zwei Paar Tangenten. In Bezug hierauf hat man folgenden Satz.

„*Das Rechteck unter den Abständen der beiden Brennpuncte a, α jedes dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitts A^2 vom Brennpuncte c*

der Parabel P^2 ist constant (an Inhalt), und zwar gleich der Quadratwurzel aus dem Product der vier Leitstrahlen, welche aus dem Brennpuncte der Parabel nach ihren Berührungspuncten mit den Seiten des Vierseits gehen." Und ferner: „*Legt man aus den beiden Brennpuncten a, α jedes eingeschriebenen Kegelschnitts A^2 an die Parabel P^2 die zwei Paar Tangenten, so ist das Product der vier Leitstrahlen, welche aus dem Brennpuncte c der Parabel nach den Berührungspuncten (p_1, q_1, r_1, s_1) dieser Tangenten gehen, ebenfalls constant, und zwar gleich jenem vorgenannten Producte. Also ist:*

$$ca \cdot c\alpha = \text{const.} = \sqrt{(cp \cdot cq \cdot cr \cdot cs)},$$
$$cp_1 \cdot cq_1 \cdot cr_1 \cdot cs_1 = \text{const.} = cp \cdot cq \cdot cr \cdot cs.\text{"}$$

Insbesondere sind also auch die Rechtecke unter den drei Paar Strahlen, welche aus dem Brennpuncte der Parabel nach den Gegenecken des Vierseits gezogen werden, an Inhalt einander gleich, und zwar auch gleich der genannten Quadratwurzel.

6. Der vorige Satz ist übrigens nur eine specielle Folge des nachstehenden Satzes.

„*Sind a und α, b und β, c und γ die Brennpuncte irgend dreier demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte, so findet zwischen ihren gegenseitigen Abständen allemal die Relation Statt, dafs z. B.*

$$\frac{ac \cdot \alpha c}{bc \cdot \beta c} = \frac{a\gamma \cdot \alpha\gamma}{b\gamma \cdot \beta\gamma}$$

ist." Sind nun c und γ insbesondere die Brennpuncte der Parabel P^2 und ist γ der unendlich entfernte, so wird der Bruch rechts $= 1$, und daher

$$ac \cdot \alpha c = bc \cdot \beta c = \text{const.};$$

was dem vorigen Satze (5.) gemäfs.

Berlin, im Mai 1852.

11.
Combinatorische Aufgabe.

(Von Herrn Professor Dr. *J. Steiner* zu Berlin.)

---

a) Welche Zahl, N, von Elementen hat die Eigenschaft, dafs sich die Elemente so zu dreien ordnen lassen, dafs je zwei in *einer*, aber *nur in einer* Verbindung vorkommen? Wie viele wesentlich verschiedene Anordnungen, d. h. solche, die nicht durch eine blofse Permutation der Elemente auseinander hervorgehen, giebt es bei jeder Zahl?

b) Wenn ferner die Elemente sich so zu vieren verbinden lassen sollen, dafs jede drei freien Elemente, d. h. solche, welche nicht schon einen der vorigen Dreier (*a*.) bilden, immer in *einem* aber *nur in einem* Vierer vorkommen, und dafs auch keine 3 Elemente eines solchen Vierers einem der vorigen Dreier angehören; so entsteht daraus keine neue Bedingung für die Zahl N.

c) Sollen die Elemente sich weiter so zu Fünfern combiniren lassen, dafs je vier unter sich noch freie Elemente, d. h. welche keinen der zuvor gebildeten Vierer (*b*.) ausmachen, noch einen der früheren Dreier (*a*.) enthalten, immer in einem, aber nur in einem Fünfer vorkommen, und dafs ein solcher Fünfer keinen der schon gebildeten Dreier noch Vierer enthält: welche neue Modification erleidet dann die Zahl N?

d) Und sollen die Elemente sich ähnlicherweise so zu Sechsern verbinden lassen, dafs zu je fünf unter sich noch freien Elementen ein bestimmtes sechstes gehört, aber keiner der so gebildeten Sechser einen der früheren Dreier oder Vierer oder Fünfer enthält; welche Beschränkung erleidet dann die Zahl N?

e) Eben so sollen Siebner gebildet werden, so dafs zu je sechs unter sich freien Elementen ein bestimmtes siebentes gehört, aber ein solcher Siebner weder einen der vorigen Dreier, noch Vierer, noch Fünfer, noch Sechser enthält. Und so soll fortgefahren werden, bis etwa für die Zahl N die Unmöglichkeit höherer Verbindungen dieser Art eintritt. Zudem soll auf jeder Stufe die allgemeine Form der Zahl N, für welche die geforderten Combinationen möglich sind, angegeben, so wie umgekehrt gezeigt werden, ob bei jeder Zahl von der

aufgefundenen Form, die geforderten Verbindungen auch in der That möglich sind. — Wenn z. B. in Rücksicht der ersten Bedingung (*a.*) allein die Zahl N von der Form $6n+1$ oder $6n+3$ sein mufs, so ist zu beweisen, dafs für jede Zahl von einer dieser zwei Formen auch in der That die N Elemente sich auf die geforderte Art zu $\frac{1}{6}N(N-1)$ Dreiern verbinden lassen. Nämlich aus den gestellten Bedingungen folgt leicht, dafs

die Zahl der Dreier $= \frac{N(N-1)}{2.3}$,

\- - - Vierer $= \frac{N(N-1)(N-3)}{2.3.4}$,

\- - - Fünfer $= \frac{N(N-1)(N-3)(N-7)}{2.3.4.5}$,

\- - - Sechser $= \frac{N(N-1)(N-3)(N-7)(N-15)}{2.3.4.5.6}$,

\- - - Siebner $= \frac{N(N-1)(N-3)(N-7)(N-15)(N-31)}{2.3.4.5.6.7}$

u. s. w. ist.

Auf die vorstehende Aufgabe wurde ich vor etwa sechs Jahren gelegentlich durch eine geometrische Betrachtung (bei Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades) geführt. Diese Betrachtung gab wohl einiges Licht über die Natur der verlangten Combinationen, aber sie genügte doch nicht, den Gegenstand vollständig aufzuklären. Der für die Mathematik leider zu früh verstorbene *Dr. Eisenstein*, welchem die Aufgabe vor längrer Zeit mitgetheilt worden, sagte mir später, dafs er aus dem Falle (*a.*), den er vorerst allein in Betracht zog, einige Anwendungen auf Beispiele der Wahrscheinlichkeitsrechnung machen könne. — Man kann die Aufgabe auch figürlich so stellen, dafs man sich unter den N Elementen eben so viele in einer Ebene beliebig liegende Puncte denkt. welche unter analogen Bedingungen zu Dreiecken (*a.*), Vierecken (*b.*), Fünfecken (*c.*), u. s. w. verbunden werden sollen.

Berlin, im November 1852.

12.

Aufgaben und Lehrsätze.

(Von Herrn Professor Dr. J. *Steiner* zu Berlin.)

---

1. *a*) „*Soll ein Kegelschnitt beschrieben werden, welcher eine gegebene Curve vierten Grads in irgend vier Puncten und nebstdem noch eine in derselben Ebene gegebene Gerade beruhrt, so ist die Zahl der Lösungen* $=252$." Oder allgemeiner:

b) „*Soll ein Kegelschnitt eine gegebene Curve vierten Grads in irgend vier Puncten und zudem eine (in derselben Ebene) gegebene Curve* n^{ten} *Grads in irgend einem Puncte berühren, so ist die Zahl der Lösungen im Allgemeinen,*

$$= 126n(n+1)."$$

2. *Es giebt, im Allgemeinen,* 126 *Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve vierten Grads in irgend vier Puncten berühren und nebstdem durch irgend einen gegebenen Punct gehen.*"

3. „*Es giebt, im Allgemeinen,* 63 *Kegelschnitte, welche eine beliebige Curve vierten Grads in irgend einem auf ihr gegebenen Puncte und nebstdem in noch irgend drei andern Puncten berühren.*"

4. „*Es giebt, im Allgemeinen,* 756 *solche Kegelschnitte, welche eine beliebige Curve vierten Grads in irgend einem Puncte, a, vierpunctig und zudem in irgend zwei andern Puncten, b und c, einfach (d. h. zweipunctig) berühren.*" „*Die* 756 *Berührungspuncte a ordnen sich zu* 12 *und* 12 *in* 63 *bestimmte Gruppen und durch die* 12 *Puncte jeder Gruppe geht je eine Curve dritten Grads.*" — „*Welche Beziehung haben diese* 63 *Curven dritten Grads zu einander?*"

5. „*Wie viele solche Puncte, a, giebt es in einer allgemeinen Curve vierten Grads, in welchen sie von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird?*"

[Nach einer gewissen Betrachtung sollte die Zahl der verlangten Puncte $=324$ sein; allein es fallen von denselben in jeden Wendungspunct der gegebenen Curve eine bestimmte gleiche Menge, denen keine eigentliche Kegelschnitte entsprechen, sondern dieselben werden durch die doppelt gedachte Wen-

dungstangente vortreten. Fielen nun in jeden Wendungspunct etwa 8 oder 9 der gedachten Puncte, so blieben noch 132 oder 108 eigentliche Lösungen übrig; wie viele fallen in jeden? Durch ein gleiches Verfahren habe ich früher die 27 Puncte, *a*, bestimmt, in welchen die Curve dritten Grads von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird (Bd. 32. S. 182 dies. Journ.). Dabei fielen von den 54 Puncten, welche die allgemeine Betrachtung anzeigt, in jeden Wendungspunct drei, so dafs nur 27 blieben.]

6. *a*) Wie viele solche Puncte, *a*, giebt es in einer Curve 5ten, 6ten, 7ten, ... Grads, in welchen dieselbe von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird?

b) Wie viele solche Puncte giebt es in einer Curve vierten Grads, in welchen sie von einer Curve dritten Grads 10punctig berührt wird? Und allgemein, wenn $m > n$:

c) Wie viele solche Puncte giebt es in einer Curve m^{ten} Grads, in welchen sie von einer Curve n^{ten} Grads $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$punctig berührt wird?

7. *a*) Einen Kegelschnitt zu finden, welcher eine gegebene Curve fünften Grads in fünf Puncten berührt. Wie viele Lösungen giebt es? — Dafs die Zahl der Lösungen ansehnlich grofs sein mufs, erhellet aus dem obigen Satze (1. *a*.), der als ein specieller Fall anzusehen ist, und wobei die Zahl der Lösungen schon 252 beträgt, aber gleichwohl bedeutend geringer sein wird, als für den allgemeinen Fall.

b) Wie viele Kegelschnitte giebt es, welche eine gegebene Curve 6ten, 7ten, ... m^{ten} Grads in fünf Puncten berühren?

8. *„Durch jeden beliebigen Punct p in der Ebene einer Curve n^{ten} Grads gehen, im Allgemeinen, $3n(n-1)$ Krümmungskreise der letztern." Liegt der Punct p insbesondere in der Curve selbst, so ist der ihm zugehörige Krümmungskreis dreifach zu zählen, oder die Zahl der durch ihn gehenden Krümmungskreise ist um 2 geringer.* — So gehen also z. B. durch jeden Punct in der Ebene eines Kegelschnitts, im Allgemeinen, 6 Krümmungskreise, und wenn der Punct in ihm selbst liegt, nur 4.

9. *„Soll ein Kreis eine gegebene Curve in irgend zwei Puncten berühren und zudem durch einen in ihrer Ebene gegebenen Punct p gehen, so giebt es, im Allgemeinen,*

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)[(n+1)(n+2)-8]$$

Lösungen." — Ist also die gegebene Curve vom 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Grad, so ist die Zahl der Lösungen beziehlich 4, 36, 132, 340, ... — *„Wenn*

der Punct p insbesondere in der gegebenen Curve selbst liegt, so wird letztere von

$$n(n+1)-4$$

lösenden Kreisen in p selbst berührt, und dann ist jeder von diesen Kreisen doppelt zu zählen, oder die Zahl der Lösungen wird um eben so viel verringert."

10. „*Soll ein Kreis durch zwei gegebene Puncte gehen und nebstdem eine gegebene Curve n^{ten} Grads berühren, so finden, im Allgemeinen,*

$$n(n+1)$$

Lösungen statt."

Berlin, im November 1852.

13.

Eine Erweiterung der *Malfatti*schen Aufgabe.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

In ein *sphärisches Dreieck LMN* drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

Die den Ecken L, M, N gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks mögen l, m, n heifsen. Die Entfernungen der Berührungspuncte der Kreise und des Dreiecks von diesen Ecken bezeichne man durch λ, μ, ν. Setzt man dann

$$\tfrac{1}{2}(l+m+n) = s,$$
$$l-s=a,\quad m-s=b,\quad n-s=c,$$
$$s-\lambda=x,\quad s-\mu=y,\quad s-\nu=z,$$

also

$$a+b+c = s,$$

so erhält man leicht folgende Gleichung:

$$(1.)\qquad \frac{\cos a\cos y\cos z}{\cos s}\;\frac{\sin a\sin y\sin z}{\sin s} = 1.$$

Sucht man jetzt aus der Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{\cos\alpha\cos b\cos c}{\cos s}+\frac{\sin\alpha\sin b\sin c}{\sin s} = 1$$

den Winkel α, so finden sich aus den Gleichungen

$$(3.)\qquad \cos(y+z) = \frac{\cos(s+\frac{1}{2}(\alpha-a))}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+a)} \quad\text{und}\quad \cos(y-z) = \frac{\cos(s-\frac{1}{2}(\alpha-a))}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+a)}$$

die Gröfsen y und z.

Die Gleichung (2.) löset man bekanntlich durch Einführung eines Hülfswinkels φ auf, den man aus der Gleichung

$$(4.)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} b\operatorname{tg} c\cot s$$

berechnet. Man findet dann

$$(5.) \qquad \cos(\alpha-\varphi) = \frac{\cos s \cos\varphi}{\cos b \cos c}.$$

Mit Hülfe rechtwinkliger sphärischer Dreiecke lassen sich die Gleichungen (3. 4. und 5.) *construiren.*

Eine gehörige Vertauschung der Buchstaben giebt aufser den Gleichungen (1. und 2.), entsprechend, noch zwei andere Gleichungen. Bei dieser Auflösung braucht s nicht die Summe $a+b+c$ darzustellen, sondern kann ein beliebiger Bogen sein.

Berlin, im October 1852.

Druckfehler und Verbesserungen in diesem Hefte.

S. 103 Z. 7 v. o. st. gelegt l. zerlegt
— 103 — 14 v. o. st. welches l. welche
— 103 — 14 v. u. st. eine der l. gleichzeitig die
— 104 — 9 v. o. st. dasselbe l. gleich
— 104 — 9 v. u. füge man bei: zu bestimmen,
— 105 — 10 v. o. statt der Gleichung l. im Allgemeinen mehrere Doppel-Integrale von der Form $\int_{\xi_0}^{\xi} dx \int_{\chi_0(x)}^{\chi(x)} f(x,y)\,dy$.
— 106 — 10 v. u. st. $\cos\frac{1}{2}\pi$ l. $\cos\frac{1}{2}\pi x$
— 112 — 2 v. u. st. umgehrte l. umgekehrte
— 116 — 11 v. u. st. der Axen l. den Axen
— 117 — 10 v. o. st. Constanten und l. Constanten,
— 124 — 6 v. u. st. $\sqrt{[abz+b^2m+2b(bm-an)]}\,\eta$ l. $\sqrt{[abz+b^2m^2+2b(bm-an)\eta]}$
— 126 — 8 v. o. st. $(ac-b^2)\eta$ l. $(ac-b^2)\eta^2$
— 126 — 10 v. o. st. $\arcsin\frac{\eta\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(ac)}}$ l. $\arcsin\frac{\eta\sqrt{(ac-b^2)}}{\sqrt{(az)}}$
— 127 — 3 v. u. st. $\frac{1}{2}\log\left\{\frac{b+\sqrt{(b^2-ac)}}{b-\sqrt{(b^2-ac)}}\right.$ l. $\left\{\frac{1}{2}\log\frac{b+\sqrt{(b^2-ac)}}{b-\sqrt{(b^2-ac)}}\right.$

Crelle's Journal d. Math. Bd. 45. Heft 2.

Fac-simile einer Handschrift von G. Eisenstein.

Lehrsätze

(Von Hr. Dr. G. Eisenstein zu Berlin)

1) Ueber die Darstellung einer Zahl durch eine ungerade Menge von Quadraten. Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine gerade Menge von Quadraten steht bekanntlich in einem merkwürdigen Zusammenhange, wenigstens für 2, 4, 6, 8 und zum Theil noch für 10 Quadrate, mit den Potenzsummen der Factoren der zu zerlegenden Zahl. Eine ganz andere Reihe von Sätzen entspringt der Zerlegungen in eine ungerade Menge von Quadraten; die letzteren Sätze beobachten ebenfalls eine eigenthümliche Analogie unter einander; für 3 und 5 Quadrate habe ich dieselben schon zusammengestellt; für 7 Quadrate finde ich, wenn $\chi(m)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_7^2 = m$ bezeichnet:

$$m \equiv 7 \pmod 8,\quad \chi(m) = -16 \cdot 37 \sum \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu^2,\quad \mu < \frac{m}{2}$$

$$m \equiv 3 \pmod 8,\quad \chi(m) = 8 \cdot 35 \cdot \left\{\tfrac{1}{3} m^2 \sum \left(\frac{\mu}{m}\right) - 2 \sum \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu^2\right\},\quad \mu < \frac{m}{2},$$

$\sum \left(\frac{\mu}{m}\right)$ ist hier das, was Dirichlet mit $A - B$ bezeichnet.

$$m \equiv 5 \pmod 8,\quad \chi(m) = 28 \cdot \sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \left(\frac{\mu}{m}\right) \mu (2m - \mu),\quad \mu \text{ ungerade und } < m$$

$$\chi(m) = -28 \cdot \sum (-1)^{\mu} \left(\frac{\mu}{m}\right)(m^2 - 4\mu^2),\quad \mu \text{ gerade und ungerade aber } < \frac{m}{2}.$$

$m \equiv 1 \pmod 8$ giebt dieselben, wie $m \equiv 5 \pmod 8$, nur ist bei der zweiten Darstellung von $\chi(m)$ nicht -28 sondern $+28$ der Factor von Σ. Die Zahl m wird ohne quadratischen Factor angenommen.

Die Analogie der Sätze für 3, 5 und 7 Quadrate tritt z. B. an folgenden speciellen Fällen recht deutlich hervor: Für eine Primzahl p von der Form $8n+3$ ist die Anzahl der Darstellungen

durch 3 Quadrate gleich der 8fachen Differenz zwischen der Anzahl der quadratischen Reste (mod p) und der Anzahl der Nichtreste, welche unter $\frac{p}{2}$ liegen; für eine Primzahl p von der Form $8n+1$ resp. $8n+5$ ist die Anzahl der Darstellungen durch 5 Quadrate gleich der -80 resp. -112 fachen Differenz zwischen der Summe der Reste und der Summe der Nichtreste unter $\frac{p}{2}$; für eine Primzahl $p = 8n+7$ ist die Anzahl der Darstellungen durch 7 Quadrate gleich der -592 fachen Differenz zwischen der Summe der Quadrate der Reste und der Quadrate der Nichtreste unter $\frac{p}{2}$; so daß wenn R die quadr. Reste, N die Nichtreste unter $\frac{p}{2}$ angeführt, die eine Formel $\Sigma R^{\sigma} - \Sigma N^{\sigma}$ den Darstellungen durch 3, 5 oder 7 Quadrate entspricht, je nachdem $\sigma = 0, 1$ oder 2 gesetzt wird.

Für die Darstellungen durch 9 Quadrate scheinen keine ähnlichen Sätze von gleicher Einfachheit stattzufinden.

. . . .

14.

Über einige neue Bestimmungs-Arten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven.

(Von Herrn Professor Dr. *J. Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einem am 4. März 1852 in der Akademie der Wissens. gehaltenen Vortrage.)

§. 1.

Die zwei hier zunächst folgenden Bestimmungs-Arten der Kegelschnitte sind den bekannten beiden Erzeugungsweisen derselben, nämlich durch die Brennpuncte oder durch den einen Brennpunct und die zugehörige Leitlinie, gewissermafsen analog und umfassen sie als besondere Fälle. Die erste Art besteht darin: dafs, statt die Summe oder Differenz der nach den Brennpuncten gezogenen Leitstrahlen als gegeben anzunehmen, hier die Summe oder Differenz zweier Tangenten, welche aus dem beschreibenden Puncte an zwei feste Kreise gezogen werden, als gegeben angesehen wird. Bei der zweiten treten an die Stelle der Leitlinie irgend eine Anzahl beliebige gegebene Gerade, auf welche aus dem beschreibenden Puncte Perpendikel gefällt und mit dem Leitstrahl nach dem einen Brennpuncte, so wie mit dem aus diesem letztern auf dieselben Geraden herabgelassenen Perpendikel in bestimmtes Verhältnifs gesetzt werden. Die daraus hervorgehenden beiden Sätze lauten wie folgt.

I. „*Sind in einer Ebene irgend zwei Kreise A^2, B^2 gegeben und man zieht aus einem willkürlichen Puncte X_0 an jeden Kreis eine Tangente α, β und verlangt, es soll entweder die Summe, $(\alpha+\beta)$, oder der Unterschied $(\alpha-\beta$ oder $\beta-\alpha)$ dieser Tangenten einer gegebenen Länge l gleich sein, so ist der Ort des Punctes X_0 allemal irgend ein Kegelschnitt C^2, welcher jeden der beiden Kreise doppelt berührt (reell oder imaginär), und von dessen Axen immer die eine oder andere auf der Mittelpunctslinie AB der Kreise liegt.*" Und umgekehrt: „*Werden einem gegebenen Kegelschnitte C^2 irgend zwei ihn doppelt berührende Kreise A^2 und B^2 eingeschrieben, deren Mittelpuncte A und B jedoch in der nämlichen Axe desselben liegen, so haben die aus jedem Puncte X_0 des*

Kegelschnitts an die Kreise gezogenen Tangenten α, β stets irgend eine bestimmte Länge l entweder zur Summe oder zum Unterschied; und zwar findet im Allgemeinen beides statt, nämlich der Kegelschnitt wird durch die Berührungspuncte mit den Kreisen in vier Bogen getheilt und für zwei dieser Bogen findet Summe ($\alpha+\beta=l$), dagegen für die beiden andern Unterschied ($\alpha-\beta=l$ oder $\beta-\alpha=l$) statt."

II. „*Sind in einer Ebene beliebige n Gerade G_1, G_2, G_3, ... G_n und irgend ein Punct A gegeben und werden die aus einem willkürlichen Puncte X auf die Geraden gefällten Perpendikel x_1, x_2, x_3, ... x_n beziehlich durch die aus dem festen Puncte A auf dieselben Geraden herabgelassenen Perpendikel a_1, a_2, a_3, ... a_n dividirt, die erhaltenen Quotienten respective mit gegebenen Coëfficienten α_1, α_2, α_3, ... α_n multiplicirt, und wird verlangt, es soll die Summe dieser Producte gleich sein dem aus A nach X gezogenen Leitstrahl $AX=x$ dividirt durch eine gegebene Länge a, also es soll*

$$\alpha_1\frac{x_1}{a_1}+\alpha_2\frac{x_2}{a_2}+\alpha_3\frac{x_3}{a_3}+\cdots\cdots+\alpha_n\frac{x_n}{a_n} = \frac{x}{a}$$

sein, so ist der Ort des Puncts X allemal irgend ein Kegelschnitt C^2, welcher den Punct A zum Brennpunct hat, und von welchem der Krümmungshalbmesser r im Scheitel der Haupt-Axe durch die n Coëfficienten und die Länge a unmittelbar bestimmt ist, nämlich es ist

$$r = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n)a;$$

eben so hängt die dem Brennpuncte A zugehörige Leitlinie G des Kegelschnitts C^2 nur von den n Coëfficienten (und den festen Elementen) ab, so dafs, wenn man die Länge a nach einander alle Werthe, von 0 bis ∞, annehmen läfst, dann eine solche Schaar Kegelschnitte C^2 entsteht, welche den Brennpunct A und die zugehörige Leitlinie G gemein haben, und bei welchen der genannte Krümmungshalbmesser r zu der zugehörigen Länge a constantes Verhältnifs hat, $\frac{r}{a}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n$."

Reduciren sich beim ersten Satze (I.) die gegebenen Kreise A^2, B^2 auf ihre Mittelpuncte A, B und läfst man beim zweiten Satze (II.) alle gegebenen Geraden, bis auf eine, fort, so erhält man die Eingangs erwähnten zwei bekannten Sätze.

§. 2.

Zunächst will ich hier in Rücksicht des zweiten Satzes nur einen Umstand kurz andeuten und sodann den ersten Satz einer ausführlicheren Erörterung unterwerfen.

Die genannte Leitlinie G ist nämlich dadurch bestimmt, dafs sie in gewissem Sinne eine Axe *mittlerer* Entfernung ist, in Rücksicht der gegebenen n Geraden, deren zugehörigen Coëfficienten und des Punctes A, und zwar in dem Sinne dafs, wenn a_0 und x_0 die aus den Puncten A und X auf die Linie G gefällten Perpendikel sind, dann für jeden Punct X der Ebene stets

$$\alpha_1\frac{x_1}{a_1}+\alpha_2\frac{x_2}{a_2}+\alpha_3\frac{x_3}{a_3}+\cdots\cdots+\alpha_n\frac{x_n}{a_n} = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n)\frac{x_0}{a_0}$$

ist. Die Leitlinie G ist jedoch hierdurch nicht absolut, sondern vieldeutig bestimmt. Denn da man in Rücksicht jeder der gegebenen n Geraden die beiden entgegengesetzten Seiten derselben durch die Zeichen $+$ und $-$ zu unterscheiden hat, und da man diese Zeichen nach Belieben wechseln kann, so entstehen, durch diese Wechselung, bei denselben gegebenen Elementen (d. h. bei denselben n Geraden G_1, G_2, ... G_n, denselben n Coëfficienten α_1, α_2, ... α_n, demselben Puncte A und derselben Länge a) viele verschiedene Leitlinien G und zugehörige Kegelschnitte C^2, und zwar ist ihre Zahl, im Allgemeinen, $= 2^{n-1}$.

So sind also z. B. bei nur zwei gegebenen Geraden G_1 und G_2, auch zwei verschiedene Leitlinien, etwa G und H, möglich; dieselben gehen beide durch den Schnittpunct jener Geraden und sind zu ihnen zugeordnet harmonisch, u. s. w. Ich übergehe hier die weitere Entwickelung dieses Gegenstandes.

§. 3.

I. Um nun den ersten Satz (§. 1, I.) umständlich zu erörtern, wollen wir mit dem bestimmten Falle beginnen, wo die gegebenen Kreise A^2 und B^2 aufsereinander liegen, wie etwa (Fig. 1. Taf. V.) die Kreise UaU_1a_1 und VbV_1b_1 über den Durchmessern UU_1 und VV_1, und um die Mittelpuncte A und B.

Es ist erforderlich, folgende Elemente näher zu fixiren, so wie auf gewisse Neben-Umstände aufmerksam zu machen.

Man bezeichne die (Gröfse der) Radien der Kreise A^2, B^2 durch a^1, b^1; den Abstand ihrer Mittelpuncte von einander, die Strecke AB, durch $2c$; sei M die Mitte der Strecke AB, also $MA = MB = c$. Die unbegrenzte Gerade $UABN$ heifse *Axe* und werde durch X bezeichnet; U und U_1, V und V_1 seien die Endpuncte der in der Axe liegenden Durchmesser der Kreise.

Man bezeichne ferner die Länge der aus den Puncten V und V_1 an den Kreis A^2 gezogenen Tangenten beziehlich durch v und v_1, und eben so die aus den Puncten U und U_1 an den Kreis B^2 gehenden Tangenten durch u und u_1. Ist Radius $a^1 > b^1$, so ist von den 4 Tangenten u die gröfste und u_1 die kleinste, nämlich ihre Folge ist: $u > v_1 > v > u_1$. Die Gerade L sei die sogenannte Linie gleicher Potenzen der gegebenen Kreise, d. h. der Ort aller Puncte, aus denen die Tangenten α, β an beide Kreise einander gleich sind, $\alpha = \beta$ oder $\alpha - \beta = 0$. Ferner seien R, R_1 die äufseren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise, und a und b, a_1 und b_1 ihre Berührungspuncte; ihr gegenseitiger Schnitt $\mathfrak{x}$ ist der äufsere Ähnlichkeitspunct der Kreise. Eben so seien S, S_1 die innern gemeinschaftlichen Tangenten, α und β, α_1 und β_1 ihre Berührungspuncte; ihr Schnitt $\mathfrak{x}_1$ ist der innere Ähnlichkeitspunct der Kreise. Diese zwei Paar gemeinschaftlichen Tangenten werden durch die 8 Berührungspuncte, durch ihre gegenseitigen 4 Schnittpuncte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ und durch die 4 Schnitte m, μ, μ_1, m_1 der Linie L so begrenzt, dafs die Abschnitte folgendermafsen einander gleich sind:

1) $ab = a_1 b_1 = \mathfrak{y}\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}\mathfrak{y}_1$, und $\alpha\beta = \alpha_1\beta_1 = \mathfrak{y}\mathfrak{z} = \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$,

2) $a\mathfrak{z} = b\mathfrak{y} = b_1\mathfrak{y}_1 = a_1\mathfrak{z}_1 = \alpha\mathfrak{z} = \beta_1\mathfrak{y} = \beta\mathfrak{y}_1 = \alpha_1\mathfrak{z}_1$,

3) $ma = mb = \mu\mathfrak{z} = \mu\mathfrak{y}_1 =$ etc., und $m\mathfrak{z} = m\mathfrak{y} = \mu\alpha = \mu\beta =$ etc.

Daher stehen die Diagonalen $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ oder Y und Z des durch die vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits RR_1SS_1 gleichweit von der Linie L ab, sind mit dieser zu der (dritten Diagonale $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ oder der) Axe X senkrecht, und in Rücksicht der Puncte y, z und m_0, in welchen sie die letztere schneiden, ist $m_0 y = m_0 z$. Die vier Berührungspuncte a, b, a_1, b_1 der äufsern Tangenten R, R_1 liegen in einem Kreise M^2, welcher den vorgenannten Punct M zum Mittelpunct hat. Eben so liegen die vier Berührungspuncte α, β, α_1, β_1 der beiden inneren Tangenten S, S_1 in einem andern Kreise M^2; und gleicherweise liegen die vier Wechselschnitte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$ der äufsern mit den innern Tangenten, nebst den Mittelpuncten A, B der gegebenen Kreise, in einem dritten Kreise M_0^2 um denselben Mittelpunct M, der somit $c = MA$ zum Radius hat. Die aus dem Puncte M auf die Tangenten R, R_1, S, S_1 gefällten Perpendikel haben beziehlich m, m_1, μ, μ_1 zu Fufspuncten, also ihre Fufspuncte auf der Linie L.

Endlich sei N die Mitte der Strecke $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ zwischen den Ähnlichkeitspuncten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$. Der mit $N\mathfrak{x} = N\mathfrak{x}_1 = n$ um den Punct N beschriebene Kreis N^2 heifst der Ähnlichkeitskreis der gegebenen Kreise A^2 und B^2.

II. Läfst man die bestimmende Länge l nach einander alle Werthe, von 0 bis ∞, durchlaufen, so entsteht die ganze Schaar Ortscurven C^2, oder $S(C^2)$, welche der obige Satz (§. 1, I.) in sich begreift. Wie auch diese Curven die Ebene bedecken mögen, so ist doch klar, dafs durch jeden Punct X_0 der Ebene nur zwei derselben gehen; denn sind α, β die Tangenten aus X_0 an A^2, B^2, so ist für die eine Curve $l = \alpha + \beta$ und für die andere $l = \alpha - \beta$ oder $= \beta - \alpha$. Wie sich gleich nachher zeigen wird, ist für jede gegebene Länge l leicht zu entscheiden, ob die zugehörige Ortscurve C^2 Ellipse E^2, Hyperbel H^2, oder Parabel P^2 sei, und wie sich dieselbe näher gegen die Kreise A^2, B^2 verhalte. Nämlich die Curve C^2 ist H^2 oder E^2, je nachdem die Länge $l < AB$ oder $l > AB$, und ist gerade $l = AB = 2c$, so findet die einzige Parabel P^2 statt. In Rücksicht ihres Verhaltens gegen die gegebenen Kreise zerfallen alle Hyperbeln in drei Gruppen, die durch $Gr(H_1^2)$, $Gr(H_2^2)$ und $Gr(H_3^2)$ bezeichnet werden sollen; von ihnen, so wie von der Gruppe Ellipsen, $Gr(E^2)$, sind folgende nähere Umstände anzugeben.

1) Für die Werthe von $l = 0$ bis $l = \alpha\beta$ (I.) entsteht die erste Gruppe Hyperbeln, $Gr(H_1^2)$, sie beginnt (für $l = 0$) mit der Linie L (die man sich als doppelt zu denken hat, als Hyperbel, deren beide Zweige in der zweiten Axe zusammengefallen sind) und endet mit dem Paar innere Tangenten (SS_1), für $l = \alpha\beta = \alpha_1\beta_1$. Von jeder H_1^2 liegt die Haupt-Axe auf der Axe X, und von ihren Zweigen umschliefst der eine den Kreis A^2, der andere den Kreis B^2; aber anfänglich berührt sie beide Kreise imaginär, bis $l = u_1$ (I.) wird, wo sie den gröfsern Kreis A^2 in U_1 berührt, und zwar 4punctig, so dafs er der Krümmungskreis in ihrem Scheitel U_1 ist; von da ab berührt die H_1^2 den Kreis A^2 in zwei reellen Puncten, aber den Kreis B^2 noch imaginär, bis $l = v$ und damit B^2 ihr Krümmungskreis im Scheitel V wird; von da ab berührt H_1^2 beide Kreise reell, bis zu ihrer Grenze (SS_1). Die reellen Berührungspuncte aller H_1^2 liegen also längs der Kreisbogen $\alpha U_1 \alpha_1$ und $\beta V \beta_1$.

2) Den Werthen von $l = \alpha\beta$ bis $l = ab$ entspricht die zweite Gruppe Hyperbeln, $Gr(H_2^2)$, sie beginnt mit dem Paar innere Tangenten (SS_1) und endet mit dem Paar äufsere Tangenten (RR_1); von jeder H_2^2 liegt die zweite Axe auf der Axe X, und von ihren zwei Zweigen berührt jeder beide Kreise von Aufsen; alle vier Berührungspuncte sind stets reell und liegen in den zwei Paar Kreisbogen $a\alpha$ und $a_1\alpha_1$, $b\beta_1$ und $b_1\beta$.

3) Hat l die Werthe von $l=ab$ bis $l=AB$, so entsteht die dritte Gruppe Hyperbeln, $Gr(H_3^2)$, beginnend mit den äufseren Tangenten (RR_1) und endend mit der Parabel P^2, die, wie schon bemerkt, dem Werthe $l=AB$ entspricht, und welche die Kreise etwa in den Puncten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ berühren soll. Von jeder H_3^2 umschliefst der eine Zweig beide Kreise und berührt sie reell; ihre Haupt-Axe liegt auf X und die Berührungspuncte liegen in den Bogen $a\mathfrak{a}$ und $a_1\mathfrak{a}_1$, $b\mathfrak{b}$ und $b_1\mathfrak{b}_1$.

4) Hat endlich l die Werthe von $l=AB$ bis $l=\infty$; so entsteht die Gruppe Ellipsen, $Gr(E^2)$, die mit der Parabel P^2 beginnt und mit einer ganz im Unendlichen liegenden Ellipse, $=E_\infty^2$, endet. Jede E^2 umschliefst beide Kreise, ihre Haupt-Axe liegt auf X; anfänglich berührt sie jeden Kreis in zwei reellen Puncten, bis $l=\mathfrak{v}_1$ wird, wobei sie den Kreis B^2 im Puncte V_1 vierpunctig berührt und ihn zum Krümmungskreise hat; von da ab berührt die E^2 nur noch den Kreis A^2 reell, bis $l=u$ wird, wobei sie ihn im Puncte U vierpunctig berührt und zum Krümmungskreise hat; von hier ab sind alle Berührungen imaginär. Die reellen Berührungspuncte aller E^2 liegen in den Bogen $\mathfrak{a}U\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}V_1\mathfrak{b}_1$.

Bei diesem Durchlaufen der ganzen Schaar Ortscurven durch stetiges Wachsen der Länge l, durchläuft der Mittelpunct der Curve C^2, der C heifsen mag, die Axe X in unveränderter Richtung, und zwar durchziehen die Mittelpuncte der verschiedenen Gruppen folgende bestimmte Strecken der Axe X. Bei der $Gr(H_1^2)$ rückt der Mittelpunct C von m_0 bis $\mathfrak{x}_1$; bei der $Gr(H_2^2)$ von $\mathfrak{x}_1$ bis $\mathfrak{x}$; bei der $Gr(H_3^2)$ rückt C, in gleicher Richtung, von $\mathfrak{x}$ bis ins Unendliche, bis zum Mittelpuncte C_∞ der Parabel P^2, und bei der $Gr(E^2)$ endlich kommt C aus dem Unendlichen, von C_∞, nach U, A, ... bis zuletzt nach M zurück, so dafs dieser letzte Punct M gerade der Mittelpunct der letzten Ellipse E_∞^2 ist, die dem Werthe $l=\infty$ entspricht und ganz im Unendlichen liegt. — Hiernach durchläuft der Mittelpunct C die ganze Axe X, bis auf die Strecke Mm_0; in dieser Strecke liegen Mittelpuncte imaginärer Ortscurven.

Für jede gegebene Länge l sind die Berührungspuncte der zugehörigen Curve C^2 mit den gegebenen Kreisen A^2 und B^2, unter andern, wie folgt leicht zu construiren. Um z. B. die Berührungspuncte mit dem Kreise A^2 zu finden, trage man auf irgend einer Tangente des Kreises B^2, etwa auf der Tangente R, von deren Berührungspunct b aus die gegebene Länge l ab, nehme $bb_0=l$: so schneidet der mit Bb_0 um den Punct B beschriebene Hülfskreis B_0^2 den Kreis A^2 in den verlangten Berührungspuncten; und im

Falle er ihn nicht wirklich schneidet, so ist auch die Berührung imaginär, aber alsdann ist die Linie der gleichen Potenzen der Kreise B_0^2 und A^2 (d. h. ihre ideelle gemeinschaftliche Secante) zugleich die ideelle Berührungssehne von C^2 und A^2. Eben so findet man die Berührungspuncte von B^2 und C^2. Danach sind also z. B. auch die vorerwähnten Berührungspuncte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ der Parabel P^2 leicht zu finden, für welche man $bb_0 = AB$ zu nehmen hat. Eben so sind die Berührungspuncte jeder der beiden Curven C^2, welche durch irgend einen gegebenen Punct X_0 gehen, leicht zu erhalten; u. s. w.

III. Die Brennpuncte der $S(C^2)$ haben bemerkenswerthe Lage und sind insgesammt einem interessanten Gesetz unterworfen.

Die zweite Gruppe Hyperbeln, die $Gr(H_2^2)$, hat zum Ort ihrer Brennpuncte den Ähnlichkeitskreis N^2, so dafs die Endpuncte jeder zum Durchmesser $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ senkrechten Sehne dieses Kreises, zugleich die Brennpuncte einer H_2^2 sind.

Von allen übrigen Ortscurven dagegen liegen die Brennpuncte in der Axe X, aber jede zwei zusammengehörige Brennpuncte sind zu den Ähnlichkeitspuncten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ zugeordnet harmonisch. Danach mufs die Parabel P^2 den Mittelpunct N des Ähnlichkeitskreises zum Brennpunct haben, weil der ihm, in Bezug auf $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, zugeordnete harmonische Punct im Unendlichen liegt. Die mehrgenannte besondere Ellipse E_∞^2 hat die Mittelpuncte A, B der gegebenen Kreise zu Brennpuncten, denn dieselben sind zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ harmonisch und stehen gleichweit vom Mittelpunct M der E_∞^2 ab *). Ferner werden hierdurch auch die Brennpuncte jener besondern ersten Hyperbel H_1^2 bestimmt, welche aus der doppelten Linie L besteht (II. 1.), denn da dieselbe offenbar m_0 zum Mittelpunct hat, so sind y und z als ihre Brennpuncte anzusehen, indem sie zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ harmonisch sind und gleichweit von m_0 abstehen, $ym_0 = zm_0$ (I.).

Demnach sind die Brennpuncte aller Ortscurven folgendem gemeinsamen Gesetz unterworfen:

„Das Rechteck unter den Abständen der beiden Brennpuncte, etwa f und f_1, jeder Ortscurve C^2 von dem Puncte N (dem Brennpunct der Parabel P^2 oder Mittelpunct des Ähnlichkeitskreises N^2) ist constant,

---

*) Bei jeder gewöhnlichen Ellipse reducirt sich der doppelt berührende Kreis, wenn sein Mittelpunct in einem Brennpuncte liegt, auf seinen Mittelpunct, d. h. sein Radius wird $= 0$ (s. Bd. 37. S. 175 dies. Journals); die obige besondere Ellipse E_∞^2, deren Umfang im Unendlichen liegt, macht also hierin eine Ausnahme.

und zwar $= n^2$, d. h. gleich dem Quadrat des Radius des Ähnlichkeitskreises, also stets $fN.f_1N = n^2$."

Ist der Mittelpunct C einer Ortscurve C^2 gegeben, so sind hiernach die Brennpuncte f und f_1 derselben bestimmt und leicht zu finden. Nämlich liegt C im Durchmesser xx_1, so sind (wie bereits angegeben) die Endpuncte der in C auf xx_1 rechtwinkligen Sehne des Kreises N^2 die verlangten Brennpuncte. Liegt dagegen C auf der Verlängerung des Durchmessers, nach der einen oder andern Seite hin, so ist die aus C an den Kreis N^2 gezogene Tangente gleich der Excentricität der zugehörigen Curve C^2, so dafs der mit der Tangente um C beschriebene Kreis die Axe X in den verlangten Brennpuncten f und f_1 schneidet. — Darauf gestützt, sind nun weiter auch die Axen der Curve C^2, so wie die ihr zugehörige Länge l zu finden. Nämlich setzt man die bereits gefundene Excentricität $Cf = Cf_1 = \gamma$, und bezeichnet die halben Axen der Curve durch α und β, die Radien der Kreise A^2 und B^2 durch a und b, statt wie oben (I.) durch a^1 und b^1, so ist im ersten Falle

$$\alpha : \gamma = a : Af = b : Bf,$$

dagegen im andern Falle

$$\beta^2 : \gamma^2 = a^2 : Af.Af_1 = b^2 : Bf.Bf_1;$$

dort findet man α, hier zunächst β^2; an beiden Orten findet man die jedesmalige andere Axe aus der bekannten Relation zwischen α, β und γ. Die Länge l wird bestimmt durch

$$l : AB = \alpha : \gamma.$$

IV. Die Puncte, in welchen irgend eine Ortscurve C^2 die Kreise A^2, B^2 berührt, mögen beziehlich p und p_1, q und q_1 heifsen. *„Die Berührungssehnen pp_1 und qq_1 sind der Linie L parallel, stehen jedesmal gleichweit von ihr ab, und sind, wie sie, zur Axe X senkrecht; (und zwar findet dies auch in dem Falle statt, wo die Berührung imaginär und die Sehnen ideel sind)."* *) Und umgekehrt: *„Jede zwei mit der Linie L parallele und von ihr gleichweit abstehende Gerade, sind die Berührungssehnen irgend einer Ortscurve C^2 mit den gegebenen Kreisen A^2 und B^2."* — Ferner: *„Die aus den Puncten p und p_1 an den Kreis B^2 gezogenen Tangenten β, sind den aus den Puncten q und q_1 an den Kreis A^2 gehenden Tangenten α gleich, und zwar sind beide gerade der, der Curve C^2 zugehörigen Länge l gleich."*

*) Dieser Satz befindet sich schon in einer früheren Abhandlung von mir, auf welche bereits vorhin verwiesen (Bd. 37. S. 176 dies. Journals).

„*Die vier Berührungspuncte p, p_1, q, q_1 liegen allemal in einem Kreise M^2, der den oftgenannten Punct M zum Mittelpunct hat.*" Und umgekehrt: „*Jeder um M beschriebene Kreis M^2 schneidet die gegebenen Kreise A^2, B^2 in solchen zwei Paar Puncten, in welchen sie von irgend einer Ortscurve C^2. berührt werden.*"

„*Die acht Puncte, in welchen die gegebenen Kreise von je zwei Ortscurven berührt werden, liegen jedesmal in irgend einem dritten Kegelschnitte, etwa D^2.*" So liegen also z. B. auch die acht Berührungspuncte a, a_1, b, b_1 und α, α_1, β, β_1 der zwei Paar gemeinschaftlichen Tangenten R, R_1 und S, S_1 in irgend einem Kegelschnitte D^2." Und umgekehrt: „*Legt man durch die vier Berührungspuncte p, p_1, q, q_1 einer Curve C^2 einen beliebigen Kegelschnitt D^2, so schneidet dieser die Kreise A^2, B^2 in solchen vier neuen Puncten p^0 und p_1^0, q^0 und q_1^0, in welchen sie von irgend einer andern Ortscurve, etwa C_1^2, berührt werden.*"

„*Die gegenseitigen vier Schnittpuncte je zweier Ortscurven C^2 und C_1^2 liegen jedesmal in einem Kreise M^2 um M;*" und umgekehrt: „*jeder um M beschriebene Kreis M^2 schneidet jede Ortscurve C^2 in vier solchen Puncten, durch welche allemal noch irgend eine andere Ortscurve C_1^2 geht.*" So schneidet also jede Curve C^2 insbesondere auch die Tangenten R und R_1 in 4 solchen Puncten, welche in einem Kreise M^2 liegen, und zwar bilden die Tangenten gleiche Sehnen in der Curve; eben so verhält es sich mit den innern Tangenten S und S_1; und noch mehr:

„*Die vier Tangenten R, R_1, S, S_1 bilden in jeder Ortscurve C^2 vier gleiche Sehnen, und zwar sind diese Sehnen gerade der jedesmaligen zugehörigen Länge l gleich, und ihre Mitten liegen sämmtlich in der Linie L, und sind die Puncte m, m_1, μ, μ_1.*" Danach sind für jede gegebene Länge l sogleich diejenigen acht Puncte anzugeben, in welchen die vier Tangenten R, R_1, S, S_1 von der zugehörigen Ortscurve C^2 geschnitten werden.

Werden die zwei Paar Berührungspuncte p und p_1, q und q_1 jeder Ortscurve C^2 wechselseitig durch Gerade verbunden, denkt man sich die je vier Geraden pq, pq_1, p_1q, p_1q_1 gezogen, die „*Wechselsehnen*" heifsen sollen, so haben alle Wechselsehnen folgende gemeinsame Eigenschaft.

Jede Wechselsehne bildet in den gegebenen Kreisen gleiche Sehnen; d. h. schneidet z. B. die Gerade pq die Kreise A^2 und B^2 zum zweiten Mal, etwa in den Puncten p^0 und q^0, so ist stets die Sehne $pp^0 = qq^0$." Ferner:

„*Die Mitte, etwa* m, *jeder Wechselsehne liegt in der Linie* L, *und das aus dem Puncte* M *auf dieselbe gefällte Perpendikel trifft sie in ihrer Mitte* m. *Daher berühren alle Wechselsehnen insgesammt eine Parabel, etwa* $\mathfrak{P}^2$, *welche* M *zum Brennpunct und die Linie* L *zur Tangente im Scheitel* m_0 *der Axe hat, und welche namentlich mit den Kreisen* A^2 *und* B^2 *die 4 Tangenten* R, R_1, S, S_1 *gemein hat* (die selbst specielle Wechselsehnen sind)."

Die Berührungstangenten der Curve C^2 und der Kreise A^2 und B^2 d. h. diejenigen Tangenten, welche in den Puncten p und p_1, q und q_1 zugleich die Curve und die respectiven Kreise berühren, sollen P und P_1, Q und Q_1 heifsen. Diese 4 Tangenten haben analoge Eigenschaften, wie die 4 Puncte; indessen will ich hier nur einige davon angeben und die übrigen der späteren Betrachtung überlassen, wo statt der Kreise A^2 und B^2 beliebige Kegelschnitte gegeben sind.

Der Schnitt PP_1, d. h. von P mit P_1, heifse $\mathfrak{p}$, und der Schnitt QQ_1 heifse $\mathfrak{p}_1$; ferner mögen die Wechselschnitte PQ und P_1Q_1, PQ_1 und P_1Q beziehlich durch $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ bezeichnet werden, so dafs also $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ die Gegenecken des vollständigen Vierseits PP_1QQ_1 sind.

„*Die Puncte* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}_1$ *liegen in der Axe* X *und sind stets zu den Ähnlichkeitspuncten* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{x}_1$ *zugeordnet harmonisch.*"

„*Der Ort aller Wechselschnitte* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ *ist der Ähnlichkeitskreis* N^2." Hierbei ist ein Neben-Umstand zu bemerken. Die Tangenten P und P_1 werden einmal die äufsern gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise A^2 und N^2, wobei sie N^2 in den Puncten $\mathfrak{r}^0$ und $\mathfrak{r}_1^0$ berühren, und ein andermal werden sie die innern gemeinschaftlichen Tangenten derselben, wobei sie N^2 in den Puncten $\mathfrak{q}^0$ und $\mathfrak{q}_1^0$ berühren: und *alsdann haben die Berührungssehnen* $\mathfrak{r}^0\mathfrak{r}_1^0$ *und* $\mathfrak{q}^0\mathfrak{q}_1^0$ *die Eigenschaft, dafs sie den Kreis* B^2 *in den Puncten* V_1 *und* V *berühren,* indem dabei gleichzeitig die beiden Tangenten Q und Q_1 auf die jedesmalige Sehne fallen und die Curve C^2 den Kreis B^2 im betreffenden Puncte V_1 oder V vierpunctig berührt (II.). Umgekehrt: „*Legt man an zwei aufsereinander liegende beliebige Kreise* A^2 *und* N^2 *die zwei Paar gemeinschaftlichen Tangenten, und zieht in dem einen oder andern Kreise, etwa in* N^2, *die beiden Berührungssehnen* $\mathfrak{r}^0\mathfrak{r}_1^0$ *und* $\mathfrak{q}^0\mathfrak{q}_1^0$ *der Tangentenpaare, beschreibt über der Strecke* V_1V, *welche diese Sehnen in der Axe* X *begrenzen, den dritten Kreis* B^2, *so haben die Kreise* B^2 *und* A^2 *den Kreis* N^2 *zum Ähnlichkeitskreis.*"

§. 4.

Wenn die gegebenen Kreise A^2 und B^2 einander schneiden, oder der eine ganz innerhalb des andern liegt, so treten in Rücksicht der angegebenen Eigenschaften (§. 3.) gewisse Änderungen ein, oder neue Umstände hinzu, zu deren Verständnifs die Bedingungen für den beschreibenden Punct X_0 (§. 1, I.) etwas umfassender gestellt werden müssen. Der allgemeinere Begriff ist: dafs man die Potenzen des Punctes X_0 in Bezug auf die Kreise ins Auge fafst (S. Bd. I. S. 163 d. Journ.). Da nun die Potenz eines Punctes X_0 in Bezug auf einen Kreis A^2 sowohl *äufsere* als *innere* sein kann, und als solche entweder durch das Quadrat der aus ihm an den Kreis gezogenen Tangente α, oder durch das Quadrat der halben kleinsten Sehne, etwa α_1, die durch ihn geht, repräsentirt wird, je nachdem der Punct *aufserhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt: so kann also bei zwei gegebenen Kreisen A^2 und B^2 ebensowohl auch nach dem Orte des Puncts gefragt werden, für welchen die Summe, $\alpha_1+\beta_1$, oder der Unterschied, $\alpha_1-\beta_1$ oder $\beta_1-\alpha_1$, der durch ihn gehenden halben kleinsten Sehnen der Kreise einer gegebenen Länge l gleich sein soll; und alsdann läfst sich diese Bedingung mit der obigen über die Tangenten α und β in die umfassendere Forderung vereinigen: *Den Ort des Punctes X_0 anzugeben, für welchen die (Quadrat-) Wurzeln der gleichartigen Potenzen in Bezug auf die gegebenen Kreise A^2 und B^2, eine gegebene Länge l, entweder zur Summe oder zum Unterschiede haben.* Wenn nun auch die Örter für innere und äufsere Potenz getrennt bleiben und demselben l nach jeder Art ein besonderer Kegelschnitt entspricht, so stehen beide Arten doch in einem gewissen Zusammenhang, und ergänzen einander auf naturgemäfse Weise. — Ferner kann man eben so den Ort desjenigen Puncts Y_0 verlangen, für welchen die Summe oder Differenz der Wurzeln der *ungleichartigen* Potenzen (d. h. der Tangente an den einen Kreis und der halben kleinsten Sehne im andern Kreise), der gegebenen Länge l gleich sein soll. In diesem Falle ist jedoch der verlangte Ort im Allgemeinen eine Curve vierten Grads.

Mit Bezug hierauf, erleiden die obigen Eigenschaften, bei der angedeuteten veränderten gegenseitigen Lage der gegebenen Kreise, nachstehende Modificationen.

§. 5.

I. Man lasse die beiden Kreise A^2 und B^2 (Fig. 1. Taf. V.) einander näher rücken, bis sie mit den Puncten U_1 und V aneinanderstofsen und sich in

einem Puncte ($U_1 V$) berühren, so fallen beide innern Tangenten S und S_1 auf die Linie L, und diese wird die Berührungstangente der Kreise im Puncte ($U_1 V$); in diesen Punct rückt auch der innere Ähnlichkeitspunct $\mathfrak{x}_1$, so wie viele andere Puncte. Damit verschwindet jene erste Gruppe Hyperbeln, die $Gr(H_1^2)$ (§. 3. II.), indem ihr Endglied (SS_1) sich mit ihrem Anfangsgliede L vereinigt, oder sie reducirt sich auf dieses einzige Glied L, welches jetzt zugleich das Anfangsglied der zweiten Gruppe, $Gr(H_2^2)$, ist. Diese Gruppe endet, wie zuvor, mit dem Paar äufsern Tangenten (RR_1); eben so bleibt bei den übrigen Gruppen alles unverändert.

II. Wenn die Kreise A^2 und B^2 einander schneiden, wie (Fig. 2. Taf. VI.), so geht die Linie L durch ihre Schnitte r und s, und auch der Ähnlichkeitskreis $N^2 = \mathfrak{x} r \mathfrak{x}_1 s$ geht durch dieselben. Die $Gr(H_2^2)$ beginnt hier wieder mit der Linie L und endet mit (RR_1); aber ihre Brennpuncte erfüllen nicht mehr den ganzen Ähnlichkeitskreis N^2, sondern nur den Bogen $r\mathfrak{x}s$ desselben. Die $Gr(H_3^2)$, so wie die $Gr(E^2)$ behalten ihre früheren Eigenschaften (§. 3. II.). Dagegen kommt jetzt eine neue Gruppe Ellipsen, etwa $Gr(E_1^2)$, hinzu, die durch innere Potenz (durch die halben Sehnen α_1, β_1) bestimmt werden, und welche innerhalb beider Kreise, in dem krummlinigen Zweieck $rVsU_1r$ liegen, also von jedem Kreise umschlossen und doppelt berührt werden, so dafs die zweite oder kleine Axe jeder E_1^2 auf die Axe X fällt. Diese $Gr(E_1^2)$ ist in gewissem Sinne als Fortsetzung der $Gr(H_2^2)$ anzusehen; nämlich der Übergang findet durch die Linie L statt, welche beiden Gruppen angehört, indem die Strecke rs als eine E_1^2, dagegen die beiden unendlichen Strecken jenseits r und s als eine H_2^2 zu betrachten sind; und zwar entsprechen beide demselben Werthe von l, nämlich $l = 0$ oder beziehlich $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha = \beta$; auch sind für beide die Puncte r und s als Hauptscheitel und zugleich als Brennpuncte anzusehen. Dadurch stehen die Brennpuncts-Örter beider Gruppen in innigem Zusammenhang; so wie die Brennpuncte der $Gr(H_2^2)$ in dem Bogen $r\mathfrak{x}s$, liegen die Brennpuncte der $Gr(E_1^2)$ in dem andern Bogen $r\mathfrak{x}_1 s$ des Ähnlichkeitskreises N^2, so dafs die Endpuncte jeder zu der Strecke $m_0\mathfrak{x}_1$ senkrechten Sehne des Bogens $r\mathfrak{x}_1 s$ zugleich die Brennpuncte einer E_1^2 sind. Die Mittelpuncte der $Gr(E_1^2)$ liegen somit in der Strecke $m_0\mathfrak{x}_1$. Läfst man die Länge l, von $l = 0$ an, wachsen, so rückt der Mittelpunct E_1 der Ortscurve E_1^2 von m_0 bis $\mathfrak{x}_1$; hier erreicht l ($= \alpha_1 + \beta_1$) ein bestimmtes Grenzmaximum und die Curve reducirt sich auf ihren Mittelpunct $\mathfrak{x}_1$. In diesem Falle, wo also der Ort des Punctes X_0 auf die einzige Lage in $\mathfrak{x}_1$ beschränkt ist,

stellt sich das genannte Maximum auch nur in den durch $\mathfrak{x}_1$ gehenden halben kleinsten Sehnen dar, die beide in der zur Axe X senkrechten Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}$ liegen, so dafs $\mathfrak{x}_1\mathfrak{a}+\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ das Grenzmaximum von l ist. Also: *„Unter allen innerhalb beider Kreise A^2 und B^2 liegenden Puncten hat der innere Ähnlichkeitspunct $\mathfrak{x}_1$ die Eigenschaft, dafs die Summe der durch ihn gehenden kleinsten Sehnen ein Maximum ist.“*

Die Puncte p und p_1, q und q_1, in welchen die Kreise A^2, B^2 von je einer innern Ortscurve E_1^2 berührt werden, sind eben so durch Hülfskreise zu construiren, wie oben (§. 3. II.), sobald die Länge l gegeben ist. Nämlich, wird z. B. im Kreise B^2 eine Sehne gezogen, deren Länge $=2l$ und deren Mitte b_0 heifsen mag, so schneidet der mit Bb_0 um B beschriebene Kreis B_0^2 den Kreis A^2 in den verlangten Berührungspuncten p und p_1. So sind ferner auch die Grenzen, wo die reelle Berührung aufhört, analogerweise anzugeben, wie oben. Wird die halbe kleinste Sehne, die im Kreise A^2 durch den Punct V geht, durch v, und die halbe kleinste Sehne, die im Kreise B^2 durch den Punct U_1 geht, durch u_1 bezeichnet, so berührt die Curve E_1^2 den Kreis A^2 oder B^2 nur so lange reell, als die Länge l beziehlich kleiner als u_1 oder v ist, und ist gerade $l=u_1$ oder $l=v$, so werden die Kreise in den Puncten U_1 oder V vierpunctig berührt und sind Krümmungskreise der Curve. Wenn Radius $a>b$, so ist $v>u_1$ und dann beginnt die imaginäre Berührung mit A^2 früher, als mit B^2. — Man denke sich eine Curve E_1^2, welche die Kreise A^2, B^2 in reellen Puncten p und p_1, q und q_1 berührt, so findet für alle Puncte X_0 in den beiden Bogen der E_1^2, welche zwischen den Berührungspuncten verschiedener Kreise, also in den Bogen pq und p_1q_1 liegen, stets Summe, $\alpha_1+\beta_1=l$, dagegen für die Bogen pp_1 und qq_1, welche von den Berührungspuncten des nämlichen Kreises begrenzt werden, stets Unterschied, beziehlich $\beta_1-\alpha_1=l$ und $\alpha_1-\beta_1=l$, statt. Werden die Puncte p und p_1 imaginär, ist $l>u_1$ und $l<v$, so wird E_1^2 durch die Puncte q und q_1 in zwei Bogen getheilt, wovon demjenigen, welcher dem Puncte U_1 näher liegt, Summe $\alpha_1+\beta_1$, dagegen dem andern, näher an V liegenden, Unterschied, $\alpha_1-\beta_1$, entspricht. Sind alle vier Berührungen imaginär, so findet für alle Puncte X_0 in E_1^2 nur Summe, $\alpha_1+\beta_1=l$, statt. Gleiches konnte auch oben (§. 3. II.) über die $Gr(E^2)$ bemerkt werden, und eben so ist bei den verschiedenen Gruppen Hyperbeln das ungleiche Verhalten ihrer Bogen in dieser Hinsicht leicht näher anzugeben.

III. Dringt der Kreis B^2 tiefer in den Kreis A^2 hinein, bis der Punct V_1 in U_1 zu liegen kommt und die Kreise einander nur noch in einem Puncte $(U_1 V_1)$ berühren, so fallen die äufsern gemeinschaftlichen Tangenten R und R_1 auf die Linie L, und diese wird die Berührungstangente der Kreise im Puncte $(U_1 V_1)$, auch ist dieselbe als der letzte Rest der jetzt auch verschwundenen zweiten Gruppe Hyperbeln, $Gr(H_2^2)$, so wie zugleich als das Anfangsglied der dritten Gruppe, $Gr(H_3^2)$, anzusehen. Nebst den Schnitten r und s rückt auch der äufsere Ähnlichkeitspunct $\mathfrak{x}$ in den Punct $(U_1 V_1)$, so dafs der Ähnlichkeitskreis N^2 sich mit den gegebenen Kreisen in demselben berührt. Die innere Gruppe Ellipsen, $Gr(E_1^2)$, wird hier vollständiger, ihre Brennpuncte erfüllen den ganzen Ähnlichkeitskreis und ihre Mittelpuncte dessen Durchmesser $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$. Das Anfangsglied der $Gr(E_1^2)$, entsprechend dem Werthe $l=0$, besteht aus dem Puncte $(U_1 V_1)$; aufser ihm kann keine andere E_1^2 den Kreis A^2 reell berühren, gleich wie der Kreis B^2 von keiner äufseren Ortscurve reell berührt wird, aufser von der Linie L. Eben so reducirt sich das Endglied der $Gr(E_1^2)$ auf den Punct $\mathfrak{x}_1$, wenn l sein Grenzmaximum erreicht, wie vorhin (II.).

IV. Befindet sich endlich der Kreis B^2 ganz innerhalb des Kreises A^2, wie (Fig. 3. Taf. VI.), so liegt die Linie L in bestimmter Entfernung jenseits beider Kreise, wogegen die Ähnlichkeitspuncte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ so wie der Ähnlichkeitskreis N^2 innerhalb des Kreises B^2 liegen. Hier beginnt die noch fortbestehende $Gr(H_3^2)$ mit der Linie L, bei dem Werthe $l=0$, und endet, bei $l=AB$, mit der Parabel P^2, welche zugleich der Anfang der $Gr(E^2)$ ist, die mit E_∞^2 endet, wie oben (§. 3. II.). Was dagegen die innern Ortscurven betrifft, so beginnt die $Gr(E_1^2)$ mit dem äufseren Ähnlichkeitspunct $\mathfrak{x}$, und zwar bei demjenigen Werthe von l, welcher das Minimum der Differenz $\alpha_1-\beta_1$ ist. Nämlich dies beruht auf dem folgenden Satze: *„Unter allen innerhalb des Kreises B^2 liegenden Puncten X_0 hat der äufsere Ähnlichkeitspunct $\mathfrak{x}$ die Eigenschaft, dafs die Differenz der durch ihn gehenden kleinsten Sehnen $2\alpha_1$ und $2\beta_1$ ein Minimum ist.* Die in $\mathfrak{x}$ zu der Axe X rechtwinklige Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}$ enthält diese zwei besondern Sehnen, so dafs also $\mathfrak{x}\mathfrak{a}-\mathfrak{x}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gerade der genannte Werth von l ist, für welchen die erste E_1^2 sich auf den Punct $\mathfrak{x}$ reducirt. Eben so reducirt sich das Endglied der $Gr(E_1^2)$ auf den innern Ähnlichkeitspunct $\mathfrak{x}_1$ und entspricht demjenigen Werthe von l, welcher das Maximum der Summe $\alpha_1+\beta_1$ ist, und sich in der in $\mathfrak{x}_1$ zu X rechtwinkligen Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}_1$ unter $\mathfrak{x}_1\mathfrak{a}_1+\mathfrak{x}_1\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ darstellt, wie oben (II.). Für die $Gr(E_1^2)$ hat somit die Länge l den Spielraum von $l=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bis $l=\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$.

Bei der gegenwärtigen Lage kann der Kreis A^2 nur von den äufsern Ortscurven $Gr(H_3^2)$ und $Gr(E^2)$, hingegen der Kreis B^2 nur von den inneren $Gr(E_1^2)$ reell berührt werden. Die Grenzen, wo beiderseits die reelle Berührung beginnt und aufhört, sind gleicherweise bestimmt, wie oben, und eben so sind, bei gegebener Länge l, die Berührungspuncte durch das bereits angegebene Verfahren leicht zu construiren. Ein Neben-Umstand, betreffend die äufsern Ortscurven, soll hier noch hervorgehoben werden.

Ob von der $Gr(H_3^2)$ ein Theil zu reeller Berührung mit dem Kreise A^2 gelangt, oder nicht, hängt davon ab, ob $u_1 < AB$ oder $u_1 > AB$, d. h. ob die aus dem Puncte U_1 (der von allen Puncten in A^2 dem Kreise B^2 am nächsten liegt) an den Kreis B^2 gezogene Tangente u_1 (§. 3. I.) kleiner oder gröfser als AB ist. Ist gerade $u_1 = AB$, so berührt allein das letzte Glied der $Gr(H_3^2)$, die Parabel P^2, den Kreis A^2 noch reell, und zwar in U_1 vierpunctig. Ist hingegen $u_1 > AB$, so folgen nach der P^2 auch noch eine bestimmte Abtheilung Ellipsen von der $Gr(E^2)$, welche nicht reell berühren, und die zur Unterscheidung durch $Gr(E_-^2)$ bezeichnet werden sollen. Für alle Puncte X_0 in einer solchen Ellipse E_-^2 findet nur Differenz $\beta - \alpha = l$ statt (dasselbe gilt in diesem Falle auch von jeder H_3^2). Die $Gr(E_-^2)$ entsprechen den Werthen von $l = AB$ bis $l = u_1$. Im letztern Falle, bei $l = u_1$, entsteht diejenige Ellipse, welche den Kreis A^2 in U_1 vierpunctig berührt und für deren ganzen Umfang wohl noch Differenz $\beta - \alpha = l$ statt hat, aber die dennoch zugleich der Anfang der reell berührenden Ellipsen E^2 ist. Von da ab, wenn l wächst, berührt E^2 den Kreis A^2 in zwei reellen Puncten p und p_1, durch welche sie in zwei Bogen getheilt wird, wovon demjenigen, der den Punct U_1 umspannt, Summe $\alpha + \beta$, dagegen dem andern, über U, Differenz $\beta - \alpha$ entspricht. Wird $l = u$ (Tangente aus U an B^2), so tritt die letzte reell berührende E^2 ein, die den Kreis A^2 in U vierpunctig berührt, und für deren ganzen Umfang nur Summe $\alpha + \beta$ statt findet. Von hier ab, wenn l fortwächst bis zu $l = \infty$, entsteht in $Gr(E^2)$ eine neue Abtheilung von solchen Ellipsen, etwa $Gr(E_+^2)$, welche den Kreis A^2 auch nicht reell berühren, aber für deren ganzen Umfang nur allein Summe $\alpha + \beta$ vorkommt. Somit giebt es unter der Voraussetzung, dafs $u_1 > AB$, in der $Gr(E^2)$ zwei getrennte Abtheilungen, $Gr(E_-^2)$ und $Gr(E_+^2)$, welche beide den Kreis A^2 umschliefsen und imaginär berühren, aber dennoch darin sich wesentlich unterscheiden, dafs für die ersten nur Unterschied $\beta - \alpha$, hingegen für die andern nur Summe $\alpha + \beta$ vorkommt. Dieses verschiedene Verhalten wird durch

folgende nähere Beziehung der beiden Kreise zu den respectiven Curven aufgeklärt. Man bezeichne allgemein die Brennpuncte einer Ellipse durch f und f_1, und die Krümmungsmittelpuncte der Scheitel ihrer Haupt-Axe durch k und k_1, so liegen die letztern Puncte zwischen jenen, und zwar soll k näher an f und k_1 näher an f_1 liegen. Die Mittelpuncte aller Kreise, welche die Ellipse imaginär doppelt berühren, fallen in die Strecken fk und f_1k_1 (S. Bd. 37. S. 175 d. Journ.). Hiernach läfst sich das Verhalten der $Gr(E^2_-)$ und $Gr(E^2_+)$ gegen die gegebenen Kreise A^2 und B^2, wie folgt näher angeben:

„Bei jeder Ellipse E^2_- liegen die Mittelpuncte A und B der Kreise beide in der nämlichen Strecke fk oder f_1k_1, wogegen bei jeder Ellipse E^2_+ dieselben in verschiedenen Strecken liegen, der eine in fk und der andere in f_1k_1."

Auch ergiebt sich aus Allem der folgende Satz:

„Zu zwei in einanderliegenden gegebenen Kreisen A^2 und B^2 kann es nur dann solche Ortscurven E^2_- geben, für deren ganzen Umfang nur allein Differenz $\beta-\alpha=l$ statt findet, wenn $u_1>AB$ ist, und dabei hat alsdann die Länge l den Spielraum von $l=AB$ bis $l=u_1$." Und umgekehrt: *„Beschreibt man in eine gegebene Ellipse zwei solche, sie imaginär doppelt berührende Kreise, deren Mittelpuncte beide in der nämlichen Strecke fk oder f_1k_1 liegen, so findet für alle Puncte X_0 in der Ellipse dieselbe constante Differenz $\beta-\alpha=l$ statt, und es ist allemal $u_1>AB$, die Constante l aber gröfser als AB und kleiner als u_1."*

§. 6.

Aus der vorhergehenden Betrachtung ist leicht zu ermessen, dafs wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise A^2, B^2 und D^2, deren Mittelpuncte A, B und D in derselben Geraden X liegen, gegeben sind, dann im Allgemeinen immer ein solcher Kegelschnitt C^2 möglich ist, welcher in Rücksicht je zweier Kreise eine ihnen zugehörige Ortscurve ist, und welcher somit jeden Kreis doppelt berührt. Die jedem Kreispaar entsprechende Länge l ist, unter andern, wie folgt zu bestimmen.

Sind a, b und d die Radien der Kreise, werden die Abstände ihrer Mittelpuncte von einander, nämlich $AB=2\mathfrak{d}$, $AD=2\mathfrak{b}$ und $BD=2\mathfrak{a}$ gesetzt, und wird die Länge l für die Kreispaare A^2 und B^2, A^2 und D^2, B^2 und D^2 beziehlich durch 2λ, $2\lambda_1$, $2\lambda_2$ bezeichnet, so hat man, wenn B zwischen A und D liegt, die Relation:

$$\lambda = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}a^2 - \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{d}d^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}),$$

$$\lambda_1 = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}(\mathfrak{a}a^2 - \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{d}d^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}),$$

$$\lambda_2 = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}(\mathfrak{a}a^2 - \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{d}d^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}),$$

§. 7.

Wird nun ferner, in Rücksicht auf zwei gegebene Kreise A^2 und B^2, der Ort desjenigen Punctes Y_0 verlangt, für welchen die Wurzeln der ungleichnamigen Potenzen eine gegebene Länge l entweder zur Summe ($\alpha+\beta_1$ oder $\beta+\alpha_1$) oder zum Unterschiede ($\alpha-\beta_1$, $\beta_1-\alpha$ oder $\beta-\alpha_1$, $\alpha_1-\beta$) haben soll (§. 4.), wobei also der Punct Y_0 nothwendigerweise jedesmal innerhalb des einen und aufserhalb des andern Kreises liegen mufs: so findet man, dafs dieser Ort, im Allgemeinen, eine Curve vierten Grades ist, $=C^4$, welche jeden der beiden Kreise in vier Puncten berührt (reell oder imaginär), die gleicherweise durch concentrische Hülfskreise (B_0^2 und A_0^2) leicht zu construiren sind, wie bei der obigen Betrachtung (§. 3. II. und §. 5. II.).

Wenn jedoch hierbei insbesondere $l=0$ sein soll, d. h. wenn nur der Ort desjenigen Punctes Y_0 verlangt wird, welcher in Rücksicht der beiden Kreise ungleichnamige aber gleiche Potenzen hat, $\alpha=\beta_1$ oder $\beta=\alpha_1$, so reducirt sich die Curve C^4 auf einen doppelten Kreis, indem die beiden Theile, aus denen sie sonst besteht, für diesen Fall zusammenfallen und einen einzigen Kreis bilden, etwa C_0^2. Dieser Kreis C_0^2 ist auch dadurch bestimmt, dafs er den oft genannten Punct M, die Mitte von AB, zum Mittelpunct und mit den gegebenen Kreisen die Linie L gemeinschaftlich zum Ort der gleichen Potenzen hat. Wenn daher die gogebenen Kreise A^2 und B^2 einander schneiden, wie (Fig. 2. Taf. VI.), so geht auch C_0^2 durch ihre Schnitte r und s; befindet sich B^2 ganz innerhalb A^2, wie (Fig. 3.), so liegt C_0^2 in dem Raume zwischen B^2 und A^2; und liegen endlich A^2 und B^2 aufsereinander, wie (Fig. 1. Taf. V.), aber so, dafs M innerhalb A^2 fällt, so kann der Kreis C_0^2 auch noch reell sein und liegt dann ganz innerhalb A^2. Aus diesen Angaben ergiebt sich der folgende Satz:

„Der Ort der ungleichnamigen gleichen Potenzen zweier gegebenen Kreise A^2 und B^2 ist ein bestimmter dritter Kreis C_0^2, dessen Mittelpunct M die Mitte der die Mittelpuncte der gegebenen Kreise verbindenden Geraden AB ist, und welcher mit diesen Kreisen den Ort der gleichen (und gleichnamigen) Potenzen, die Linie L, gemein hat." Oder, unter

anderer Auffassung, auch so: *„Der Ort des Mittelpuncts Y_0 desjenigen Kreises Y_0^2, welcher von dem einen gegebenen Kreise, A^2 oder B^2, gleichviel von welchem, rechtwinklig und von dem jedesmaligen andern im Durchmesser geschnitten wird, ist ein bestimmter Kreis C_0^2, dessen Mittelpunct M die Mitte von AB ist, und welcher mit den gegebenen Kreisen eine (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante L hat."*

Wenn ferner die gegebenen Kreise A^2 und B^2 insbesondere concentrisch sind, so zerfällt die Curve C^4, bei jeder gegebenen Länge l, in zwei mit jenen concentrische Kreise C^2 und C_1^2, deren Radien c und c_1 dem Gesetz unterworfen sind, dafs stets

$$c^2+c_1^2 = a^2+b^2$$

ist, d. h., *dafs die Summe der Quadrate dieser Radien constant, und zwar der Summe der Quadrate der Radien der gegebenen Kreise A^2 und B^2 gleich ist,* in welche letztere jene Kreise C^2 und C_1^2 auch in der That übergehen, wenn $l=u=u_1$ wird (§. 3. I.). — Für $l=0$ fallen die Kreise C^2 und C_1^2 aufeinander, bilden den vorgenannten Kreis C_0^2, für dessen Radius c_0 man hat:

$$2c_0^2 = a^2+b^2.$$

§. 8.

Die obige Betrachtung führte auf eine unendliche Schaar Curven zweiten Grads, $S(C^2)$, welche die zwei gegebenen Kreise A^2 und B^2 doppelt berühren; allein diese Schaar umfafst nicht alle Kegelschnitte, welche die Kreise doppelt berühren, vielmehr giebt es, im Allgemeinen, noch zwei andere Schaaren, die diese Eigenschaft auch besitzen. Über die beiden letztern Kegelschnittschaaren sollen hier noch einige bemerkenswerthe Umstände angedeutet werden.

Die gegebenen Kreise haben (wie jede zwei in gleicher Ebene liegende Kegelschnitte) ein gemeinschaftliches Trippel zugeordnete Pole x, y und z, so wie auch ein gemeinschaftliches Trippel conjugirte Polaren X, Y und Z; jene sind die Ecken und diese die respectiven Gegenseiten des nämlichen Dreiecks. Einer der drei Pole, etwa x, liegt im Unendlichen, und zwar nach der Richtung der Linie L, als deren unendlich entfernten Punct er anzusehen ist; derselbe ist stets reell, wogegen die beiden andern, y und z, gleichzeitig *imaginär* oder *reell* sind, je nachdem die Kreise einander *schneiden* oder *nicht,* nämlich sie sind zugleich die Schnitte der Axe (oder Polare) X mit jedem Kreise, welcher beide gegebenen Kreise A^2 und B^2 rechtwinklig schneidet;

oder wofern die letztern Kreise aufsereinander liegen, wie (Fig. 1. Taf. V.), so sind die Pole y und z zugleich die Schnitte der Diagonale $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 = X$ mit den beiden andern Diagonalen $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 = Z$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 = Y$ des durch die vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten Vierseits RR_1SS_1. Zu diesen drei Polen haben nun die erwähnten drei Kegelschnittschaaren nachstehende wesentliche Beziehung.

Die obigen Ortscurven, $S(C^2)$, haben Bezug auf den Pol x und sollen daher durch $S(C_x^2)$ bezeichnet werden; nämlich die Berührungssehnen pp_1 und qq_1 jeder Curve C_x^2 sind der Linie L parallel und gehen daher mit ihr nach dem Pole x (§. 3. IV.). — Nun giebt es eine zweite Schaar Kegelschnitte, $S(C_y^2)$, welche die gegebenen Kreise doppelt berühren, und welche sich gleicherweise auf den Pol y beziehen, indem nämlich die Berührungssehnen pp_1 und qq_1 jeder Curve C_y^2 durch diesen Pol gehen. Und eben so giebt es eine dritte Kegelschnittschaar, $S(C_z^2)$, welche die gegebenen Kreise doppelt berühren, und bei welchen die Berührungssehnen pp_1 und qq_1 stets durch den Pol z gehen. Von den beiden letztern Kegelschnittschaaren sind unter andern folgende interessante Eigenschaften anzugeben.

1) *„Die Berührungssehnen pp_1 und qq_1 jeder Curve C_y^2 so wie jeder Curve C_z^2 sind stets zu einander rechtwinklig; und umgekehrt: zieht man durch den Pol y oder z irgend zwei zu einander rechtwinklige Secanten pp_1 und qq_1 beider Kreise A^2 und B^2, so werden diese in den zwei Paar Schnittpuncten p und p_1, q und q_1 allemal von einer Curve C_y^2 oder C_z^2 berührt."*

2) *„Von den beiden Axen jeder Curve C_y^2 oder C_z^2 geht die eine durch den Mittelpunct A und die andern durch den Mittelpunct B. Folglich ist der Ort der Mittelpuncte beider Schaaren, $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$, ein und derselbe Kreis M_0^2, welcher die Strecke AB zum Durchmesser hat* (§. 3. I.), *so dafs also jeder Punct dieses Kreises zugleich der Mittelpunct sowohl einer Curve C_y^2 als einer Curve C_z^2 ist, und dafs die Axen dieser beiden Curven aufeinander fallen."*

3) *„Die $S(C_y^2)$ sowohl als die $S(C_z^2)$ sind unter sich ähnlich; und zwar verhalten sich die Quadrate der Axen jeder C_y^2, wie die Abstände des Pols y von den Mittelpuncten A und B; und eben so verhalten sich die Quadrate der Axen jeder C_z^2, wie die Strecken zA und zB. Nämlich so: sind α, β die halben Axen einer C_y^2, und geht α durch A und β durch B, so ist*

$$\alpha^2 : \beta^2 = yA : yB;$$

und sind eben so α_1, β_1 die halben Axen einer C_z^2 und gehen dieselben beziehlich durch A, B, so ist

$$\alpha_1^2 : \beta_1^2 = zA : zB.$$

Da nun y und z conjugirte Pole in Rücksicht beider Kreise A^2 und B^2 sind, so daſs

$$Ay.Az = a^2, \text{ und } Bz.By = b^2$$

ist, so ergiebt sich aus beiden vorstehenden Proportionen die folgende:

$$\alpha\alpha_1 : \beta\beta_1 = a : b,$$

das heiſst: In Rücksicht je zweier Curven C_y^2 und C_z^2 aus beiden Schaaren verhält sich das Rechteck unter den Axen die durch A gehen zum Rechteck unter den Axen die durch B gehen, wie der Radius a des Kreises A^2 zum Radius b des Kreises B^2."

4) *„Der Ort der Brennpuncte jeder der beiden Schaaren, wie etwa der $S(C_y^2)$, besteht im Allgemeinen aus zwei Kreisen A_y^2 und B_y^2, welche mit den gegebenen Kreisen dieselben Mittelpuncte A und B haben, und welche entweder einander rechtwinklig schneiden, oder von denen der eine den andern im Durchmesser schneidet. Geht die Haupt-Axe einer Curve C_y^2 durch A oder B, so liegen ihre Brennpuncte f und f_1 beziehlich im Kreise B_y^2 oder A_y^2. Das Rechteck unter den Abständen jedes Paars Brennpuncte f und f_1 von dem Puncte A sowohl als von dem Puncte B ist constant, und zwar gleich dem Quadrat des Radius a_y oder b_y des zugehörigen Kreises A_y^2 oder B_y^2, also*

$$Af.Af_1 = a_y^2, \text{ und } Bf.Bf_1 = b_y^2.$$

Eben so liegen die Brennpuncte der $S(C_z^2)$ in zwei Kreisen A_z^2 und B_z^2, mit denen es gleiche Bewandtniſs hat."

5) *Zieht man zwischen den zwei Paar Puncten p und p_1, q und q_1, in welchen jede Curve C_y^2 die gegebenen Kreise A^2, B^2 berührt, die vier Wechselsehnen pq, pq_1, p_1q und p_1q_1, so berühren alle diese Sehnen einen und denselben bestimmten Kegelschnitt, etwa Y^2, welcher den Pol y zum Brennpunct und mit den Kreisen die vier (reellen oder imaginären) Tangenten R, R_1, S und S_1 gemein hat, und dessen Brennpuncte y und (der noch unbekannte) y_1 zu den Puncten A und B zugeordnet harmonisch sind. Jede Wechselsehne bildet in den Kreisen A^2 und B^2 zwei Sehnen, etwa s und s_1; das Verhältniſs dieser Sehnen ist für alle Wechselsehnen dasselbe, $s : s_1 = k$ constant. — Eben so berühren die Wechselsehnen der $S(C_z^2)$ einen bestimmten Kegelschnitt Z^2,*

welcher z zum Brennpunct und mit den Kreisen A^2, B^2 dieselben vier Tangenten gemein hat, und dessen Brennpuncte z und z_1 zu den Puncten A und B zugeordnet harmonisch sind. Auch bilden die Wechselsehnen in den Kreisen solche Sehnen s und s_1, deren Verhältnifs constant, jedoch von dem vorigen verschieden ist, $s:s_1 = k_1$ constant."

6) *„Sind P und P_1, Q und Q_1 die Berührungstangenten der Kreise A^2, B^2 mit einer Curve C_y^2* (§. 3. IV.), *so liegen die Schnitte $PP_1 = \mathfrak{p}$ und $QQ_1 = \mathfrak{p}_1$ allemal in der Polare Y, und alle Paare $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ bilden ein Puncten-System (Involution). Dagegen ist der Ort der vier Wechselschnitte PQ und P_1Q_1, PQ_1 und P_1Q, oder $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$* (§. 3. IV.) *ein bestimmter Kreis N_y^2, welcher durch dasselbe Paar Gegenecken $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ geht, wie Y, und welcher mit den Kreisen A^2 und B^2 die Linie L zur gemeinschaftlichen Secante hat, so dafs sein Mittelpunct N_y auch in der Axe X liegt. — Ganz analog verhält es sich in dieser Hinsicht mit der $S(C_z^2)$."*

Um den Einflufs der verschiedenen gegenseitigen Lage der gegebenen Kreise auf die angegebenen Eigenschaften zu zeigen, wollen wir die Kreise in ihren wesentlichsten Lagen, nämlich wo sie aufsereinander liegen und wo B^2 ganz innerhalb A^2 liegt, noch etwas näher betrachten. Beim Zwischenfalle, wo die Kreise einander schneiden, sind $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$ imaginär.

I. *„Liegen die Kreise aufsereinander, wie* (*Fig.* 1.), *so bestehen beide Schaaren, $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$, aus Hyperbeln $S(H_y^2)$ und $S(H_z^2)$, jede Schaar unter sich ähnlich. Die um die Puncte A und B beschriebenen Kreise A_y^2 und B_y^2, welche die Brennpuncte der $S(H_y^2)$ enthalten, schneiden einander in den Gegenecken $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ des Vierseits RR_1SS_1 rechtwinklig; und eben so schneiden sich anderseits die Kreise A_z^2 und B_z^2 in den Ecken $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ rechtwinklig. — Liegt der Mittelpunct einer H_y^2 in dem Bogen $\mathfrak{y}\mathfrak{z}A\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ des Kreises M_0^2, so umschliefst dieselbe den Kreis B^2, und somit geht ihre Haupt-Axe durch den Punct B und schneidet den Kreis A_y^2 in ihren Brennpuncten f und f_1. Liegt hingegen der Mittelpunct einer H_y^2 in dem andern Bogen $\mathfrak{y}B\mathfrak{y}_1$, so umschliefst sie den Kreis A^2; ihre Haupt-Axe geht durch A, und ihre Brennpuncte liegen im Kreise B^2. Der Übergang von der einen Abtheilung zur andern, findet durch die Tangentenpaare (RS_1) und (R_1S) statt, welche specielle H_y^2 sind, und beziehlich $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ zu Mittelpuncten haben. Ganz ähnlich verhält es sich mit den Hyperbeln H_z^2. — Die Asymptoten jeder H_y^2*

gehen durch die festen Ecken $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$; und eben so gehen die Asymptoten jeder H_z^2 durch die Ecken $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$."

II. *Liegt der Kreis B^2 ganz innerhalb A^2, wie (Fig. 3.), so bestehen beide Schaaren $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$ aus Ellipsen, also $S(E_y^2)$ und $S(E_z^2)$. Jede E_y^2 umschliefst den Kreis B^2 und wird vom Kreise A^2 umschlossen, so dafs also ihre Haupt-Axe stets durch den Punct B geht, und ihre Brennpuncte f und f_1 immer in demselben bestimmten Kreise A_y^2 um A liegen; (hier wird der Kreis B_y^2, um B, vom Kreise A_y^2 im Durchmesser geschnitten, aber aufser diesen Schnitten enthält er keine reelle Brennpuncte). Eben so umschliefst jede E_z^2 den Kreis B^2 und wird von A^2 umschlossen, so dafs ihre Haupt-Axe nur durch B geht, und ihre Brennpuncte in einem bestimmten Kreise A_z^2 um A liegen."*

§. 9.

Bemerkung. In dem Vorhergehenden kommen beiläufig drei Beispiele vor, wo eine Gerade (dort Wechselsehne genannt, §. 3. IV. und §. 8. 5.), welche in den gegebenen Kreisen A^2 und B^2 Sehnen s und s_1 von constantem Verhältnifs bildet, einen Kegelschnitt zum Ort hat. Diese Eigenschaft ist allgemein und gewährt folgenden Satz.

„*Der Ort einer Geraden G, welche in zwei gegebenen festen Kreisen A^2 und B^2 solche Sehnen s und s_1 bildet, deren Verhältnifs irgend einen gegebenen Werth k hat, so dafs $s:s_1=k$, ist allemal irgend ein bestimmter Kegelschnitt G^2;* *) *und alle auf diese Weise bestimmten Kegelschnitte, wofern der Werth k nacheinander alle Gröfsen durchläuft, bilden einen Curven-Büschel, $B(G^2)$, mit vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten (R, R_1, S, S_1), und zwar gehören die gegebenen Kreise A^2 und B^2 selbst mit zu diesem Büschel, nämlich sie entsprechen beziehlich den Werthen $k=0$ und $k=\infty$. Dem Werthe $k=1$ oder $s=s_1$, entspricht, wie oben (§. 3. IV.), die Parabel $\mathfrak{P}^2$ ($=G^2$), welche den Punct M zum Brennpunct und die Linie L zur Tangente im Scheitel hat. Dem Werthe $k=a:b$ entsprechen beide Ähnlichkeitspuncte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, die zusammen eine specielle G^2 sind; etc."* — Und umgekehrt: „*Die Tangenten jedes Kegelschnitts G^2, welcher mit zwei*

*) Diesen Satz habe ich bereits im J. 1827, mit einer Reihe anderer Sätze, dem Herausgeber der *Annales des Mathem.* nach *Montpellier* übersandt, welcher ihn später — vielleicht durch Versehen — unter dem Namen eines Andern abdrucken liefs.

Kreisen A^2 und B^2 vier reelle oder imaginäre Tangenten gemein hat, bilden in diesen Kreisen solche Sehnen s und s_1, deren Verhältnifs constant ist, d. h. für alle Tangenten denselben bestimmten Werth k hat; etc."

Statt einer ausführlichen Erörterung dieses Gegenstandes, beschränke ich mich hier auf folgende Angaben.

Die Mittelpuncte der Ortscurven, $B(G^2)$, liegen sämmtlich in der Axe X, auf welche zugleich auch je eine Axe von jeder Curve fällt. Ob die erste oder zweite Axe der Curve auf X fällt, hängt davon ab, ob ihr Mittelpunct jenseits der Strecke AB, oder ob er in dieser Strecke liegt. Dadurch scheiden sich die Curven in zwei Abtheilungen, etwa $Gr(G_1^2)$ und $Gr(G_2^2)$. In Hinsicht der Brennpuncte dieser beiden Gruppen hat es folgende Bewandtnifs:

„Die Brennpuncte der $Gr(G_1^2)$ liegen in der Axe X und jedes Paar Brennpuncte f und f_1 ist zu den Puncten A und B zugeordnet harmonisch. Dagegen liegen die Brennpuncte der $Gr(G_2^2)$ in dem Kreise M_0^2, welcher die Strecke $AB = 2c$ zum Durchmesser hat (§. 3. I.), so dafs jedes Paar Brennpuncte zugleich die Endpuncte einer zu diesem Durchmesser senkrechten Sehne des Kreises sind."

Daraus geht hervor, dafs hier gleicherweise, wie oben (§. 3. III. und §. 8. 4.), für beide Gruppen das gemeinschaftliche Gesetz statt findet:

„Dafs das Rechteck unter den Abständen der Brennpuncte f und f_1 jeder Curve G^2 von dem Puncte M, dem Brennpnncte der Parabel $\mathfrak{P}^2$, constant und zwar $= c^2$ ist."

Berlin, im October 1852.

15.

Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte.

(Von Herrn Professor Dr. *J. Steiner* zu Berlin.)

---

§. 10.

An die vorhergehende Abhandlung, namentlich an diejenige Betrachtung, wo das Verhalten der gesammten Kegelschnitte, welche zwei feste Kreise doppelt berühren, angegeben worden, erlaube ich mir hier die etwas allgemeinere Betrachtung anzuschliefsen, wo statt der Kreise irgend zwei Kegelschnitte, die gleichfalls durch A^2 und B^2 bezeichnet werden mögen, in fester Lage gegeben sind, und wobei eben so die Eigenschaften aller sie doppelt berührenden Kegelschnitte berücksichtigt werden sollen.

I. Um einen bestimmten Fall (Figur) vor Augen zu haben, denke oder zeichne man zwei Ellipsen A^2 und B^2, welche einander in vier Puncten r, s, t, u schneiden, und somit auch vier reelle gemeinschaftliche Tangenten R, S, T, U haben; nämlich diejenige Tangente heifse R, von deren Berührungspuncten aus zwei Bogen beider Ellipsen unmittelbar nach dem Schnitte r führen; eben so die andern. Die vier Schnitte bilden ein vollständiges Viereck $rstu$ und die vier Tangenten ein vollständiges Vierseit $RSTU$. In Betracht der drei Paar Gegenseiten des erstern und deren Schnitte, so wie in Rücksicht der drei Paar Gegenecken des letztern und dessen drei Diagonalen setze man:

Seite	$rs = \mathfrak{X}$	und	$tu = \mathfrak{X}_1$;	Schnitt	$\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1 = x$.
-	$rt = \mathfrak{Y}$	und	$su = \mathfrak{Y}_1$;	-	$\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1 = y$.
-	$ru = \mathfrak{Z}$	und	$st = \mathfrak{Z}_1$;	-	$\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1 = z$.
Ecke	$RS = \mathfrak{x}$	und	$TU = \mathfrak{x}_1$;	Diagonale	$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 = X$.
-	$RT = \mathfrak{y}$	und	$SU = \mathfrak{y}_1$;	-	$\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 = Y$.
-	$RU = \mathfrak{z}$	und	$ST = \mathfrak{z}_1$;	-	$\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 = Z$.

Die Schnitte x, y, z der drei Paar Gegenseiten des Vierecks sind das gemeinschaftliche Trippel conjugirte Pole und die drei Diagonalen X, Y, Z des Vierseits sind das gemeinschaftliche Trippel conjugirte Polaren der beiden Ellipsen, so dafs also auch

Schnitt $XY = z$, $XZ = y$, $YZ = x$ und
Gerade $xy = Z$, $xz = Y$, $yz = X$

ist. Ferner sind dabei einerseits x, $\mathfrak{z}$, y und $\mathfrak{z}_1$; x, $\mathfrak{y}$, z und $\mathfrak{y}_1$; y, $\mathfrak{x}$, z und $\mathfrak{x}_1$ vier harmonische Puncte, so wie andererseits X, $\mathfrak{Z}$, Y und $\mathfrak{Z}_1$; X, $\mathfrak{Y}$, Z und $\mathfrak{Y}_1$; Y, $\mathfrak{X}$, Z und $\mathfrak{X}_1$ vier harmonische Gerade.

Mit Bezug hierauf und mit Berücksichtigung anderer, im vorigen Aufsatze bereits angewandter Bezeichnungen und Benennungen, lassen sich die erwähnten Eigenschaften, wie folgt, aussprechen.

II. Die gesammten Kegelschnitte C^2, welche beide gegebenen Ellipsen A^2 und B^2 doppelt berühren, zerfallen vermöge ihrer Beziehung zu den drei Polen x, y und z, in drei verschiedene Schaaren $S(C_x^2)$, $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$, (§. 8.), welche sich jedoch im Allgemeinen gleich verhalten und gleiche Eigenschaften haben, so dafs wir Kürze halber nur von der einen Schaar, etwa von $S(C_x^2)$, zu sprechen brauchen.

1) „*Berührt eine Curve C_x^2 die Ellipse A^2 in den Puncten p und p_1, und die Ellipse B^2 in den Puncten q und q_1, so gehen die Berührungssehnen pp_1 und qq_1 durch den Pol x und sind allemal zu den Gegenseiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ zugeordnet harmonisch.*" Und umgekehrt: „*Zieht man durch den Pol x irgend zwei zu den Seiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ zugeordnete harmonische Gerade, etwa G und H, so schneiden sie die Ellipsen A^2 und B^2 beziehlich in solchen Puncten p, p_1 und q, q_1, in welchen dieselben von einer Curve C_x^2 berührt werden; und ferner schneiden sie verwechselt, H die A^2 und G die B^2 in solchen Puncten p^0, p_1^0 und q^0, q_1^0, in welchen A^2 und B^2 von einer andern Curve C_x^2 berührt werden.*"

2) „*Werden zwischen je zwei Paar zusammengehörigen Berührungspuncten p und p_1, q und q_1 die vier Wechselsehnen pq, pq_1, p_1q und p_1q_1 gezogen* (§. 8. 5.), *so berühren dieselben insgesammt einen bestimmten Kegelschnitt, etwa X^2, welcher dem Vierseit $RSTU$ eingeschrieben ist und auch die zwei Gegenseiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ berührt (indem die letztern, so wie die Tangenten R, S, T, U specielle Wechselsehnen sind).*" Und ferner: „*Die aus den zwei Schnitten der Polare X mit der Ellipse B^2 (oder A^2) an den Kegelschnitt X^2 gelegten zwei Paar Tangenten, berühren ihn in den nämlichen Puncten, in welchen er von der andern Ellipse A^2 (oder B^2) geschnitten wird.*"

3) „*Legt man durch die vier Berührungspuncte p und p_1, q und q_1 irgend einen willkürlichen Kegelschnitt D^2, so schneidet er die gege-*

benen Curven A^2 und B^2 in vier solchen neuen Puncten p^0 und p_1^0, q^0 und q_1^0, in welchen dieselben von einer andern Curve C_x^2 berührt werden." Und umgekehrt: *„Die acht Berührungspuncte je zweier Curven C_x^2 mit den Ellipsen A^2 und B^2 liegen jedesmal in irgend einem Kegelschnitte D^2."* — *„Alle Curven C_x^2 haben gemeinschaftlich x und X zu Pol und Polaren. Von den gemeinschaftlichen Secanten je zweier Curven C_x^2 geht immer ein Paar, etwa G und H, durch den Pol x und sie sind allemal zu $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ zugeordnet harmonisch."*

4) *„Jede vier Berührungspuncte p, p_1, q, q_1 liegen einerseits mit den Ecken r und s in einem Kegelschnitte, etwa M^2, und andererseits mit den Ecken t und u in einem Kegelschnitte M_1^2. Die gesammten hierdurch bestimmten Kegelschnitte M^2 berühren einander in den Puncten r und s, so dafs sie daselbst gemeinschaftliche Berührungstangenten, etwa $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, haben, mit der gemeinschaftlichen Berührungssehne $rs = \mathfrak{X}$, und somit einen speciellen Curven-Büschel, $B(M^2)$, bilden. Der Schnitt der Tangenten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ heifse m; er liegt in der Polare X und m und $\mathfrak{X}$ sind Pol und Polare in Bezug auf alle M^2, auf $B(M^2)$. Seien a und b die Pole der Seite $\mathfrak{X}$ in Bezug auf A^2 und B^2, dieselben liegen auch in X, und sei c der Schnitt von X mit $\mathfrak{X}$: so sind die vier Puncte a, m, b, c harmonisch, so dafs also der Pol m durch die, als gegeben anzusehenden drei Puncte a, b, c bestimmt ist; und durch ihn sind dann auch die Tangenten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ ($= mr$ und ms) bestimmt. Ganz eben so berühren alle Kegelschnitte M_1^2 einander in den Puncten t und u, haben daselbst gemeinschaftliche Berührungstangenten $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$, mit der Berührungssehne $tu = \mathfrak{X}_1$, und bilden einen speciellen Curven-Büschel $B(M_1^2)$; und ferner liegen der Schnitt m_1 von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{U}$, und die Pole a_1 und b_1 der Seite $\mathfrak{X}_1$ in Bezug auf A^2 und B^2 in derselben Polare X, und ist zudem c_1 der Schnitt von X mit $\mathfrak{X}_1$, so sind die vier Puncte a_1, m_1, b_1, c_1 harmonisch, also durch a_1, b_1 und c_1 der Pol m_1 und durch ihn die Tangenten $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ bestimmt."* — *„Die auf diese Weise bestimmten zwei Paar Tangenten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ berühren auch den obigen Kegelschnitt X^2, den Ort aller Wechselsehnen (2.), und zwar berühren ihn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in ihren Schnitten mit der Seite $\mathfrak{X}_1$, und eben so berühren ihn $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{U}$ in ihren Schnitten mit der Seite $\mathfrak{X}$, so dafs also in Bezug auf X^2 verwechselt m der Pol von $\mathfrak{X}_1$, und m_1 der Pol von $\mathfrak{X}$ ist."* Werden diese zwei Paar Tangenten vorausgesetzt, so kann man auch umgekehrt be-

haupten: *„Jeder Kegelschnitt M^2, welcher die Geraden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in den Puncten r und s berührt, schneidet die gegebenen Curven A^2 und B^2 in vier solchen Puncten p und p_1, q und q_1 (aufser in r und s), in welchen sie von einer Curve C_x^2 berührt werden."* *„Die gegenseitigen vier Schnitte je zweier Curven C_x^2 liegen allemal in einem Kegelschnitte M^2 (der $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in r und s berührt); und umgekehrt: jeder Kegelschnitt M^2 schneidet jede Curve C_x^2 in solchen vier Puncten, durch welche allemal noch irgend eine andere Curve C_x^2 geht."* *Gleiches gilt für die Kegelschnitte M_1^2.*

III. 1) *„Sind P und P_1, Q und Q_1 die Berührungstangenten einer C_x^2 mit den gegebenen Curven A^2 und B^2, so liegen die Schnitte $PP_1 = p$ und $QQ_1 = p_1$ stets in der Polare X und sind allemal zu den Ecken $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ zugeordnet harmonisch."* Und umgekehrt: *„Nimmt man in der Polare X irgend zwei zu den Gegenecken $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ zugeordnete harmonische Puncte, etwa g und h, an, so sind die aus ihnen an die Curven A^2 und B^2 gezogenen Tangenten P und P_1, Q und Q_1 zugleich die Berührungstangenten dieser Curven mit irgend einer Curve C_x^2; und eben so sind die (verwechselt) aus h und g beziehlich an A^2 und B^2 gelegten Tangenten P^0 und P_1^0, Q^0 und Q_1^0 zugleich die Berührungstangenten einer C_x^2 mit A^2 und B^2."*

2) *„Jede zwei Paar zusammengehörige Berührungstangenten P und P_1, Q und Q_1 haben vier Wechselschnitte PQ, und PQ_1, P_1Q und P_1Q_1; der Ort aller dieser Wechselschnitte ist ein bestimmter Kegelschnitt, etwa $\mathfrak{X}^2$, welcher dem Viereck rstu umgeschrieben ist, und zudem durch die Gegenecken $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ geht."* Und ferner: *„Die aus dem Pol x an die Ellipse B^2 (oder A^2) gezogenen Tangenten schneiden den Kegelschnitt $\mathfrak{X}^2$ in denselben Puncten, in denen er von den vier Tangenten berührt wird, welche er mit der andern Ellipse A^2 (oder B^2) gemein hat."*

3) *„Werden die vier Berührungstangenten P und P_1, Q und Q_1 von einem willkürlichen andern Kegelschnitte D^2 berührt, so hat dieser mit den gegebenen Curven A^2 und B^2 noch zwei neue Paare Tangenten P^0 und P_1^0, Q^0 und Q_1^0 gemein, welche allemal die Berührungstangenten einer andern Curve C_x^2 mit A^2 und B^2 sind."* Und umgekehrt: *„Die acht Berührungstangenten irgend zweier Curven C_x^2 mit den Curven A^2 und B^2 werden allemal von irgend einem Kegelschnitte D^2 berührt."* — *„Von den gegenseitigen Schnitten der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier*

Curven C_x^2 liegt immer ein Paar, etwa g und h, auf der Polare X und sie sind allemal zu den Ecken $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{x}_1$ *zugeordnet harmonisch.*"

4) „*Jede vier Berührungstangenten P, P_1, Q, Q_1 werden einerseits mit den Tangenten R und S zusammen von einem Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$, und andererseits mit den Tangenten T und U zusammen von einem Kegelschnitte $\mathfrak{M}_1^2$ berührt. Alle hierdurch bestimmten Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ berühren die Tangenten R und S in den nämlichen Puncten, etwa* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{s}$, *und somit auch einander selbst, so dafs sie $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \mathfrak{M}$ zur gemeinschaftlichen Berührungssehne, so wie* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{M}$ *gemeinschaftlich zu Pol und Polare haben, und einen speciellen Curven-Büschel, $B(\mathfrak{M}^2)$ bilden. Die Berührungssehne $\mathfrak{M}$ geht durch den Pol x; eben so die Polaren von* $\mathfrak{x}$ *in Bezug auf A^2 und B^2, die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heifsen mögen; und wird noch die Gerade $x\mathfrak{x} = \mathfrak{C}$ gesetzt, so sind die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ harmonisch; somit ist $\mathfrak{M}$ durch die drei übrigen, die als gegeben anzusehen sind, bestimmt, und durch $\mathfrak{M}$ sind dann auch die Puncte* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{s}$ *bestimmt, als ihre Schnitte mit R und S. Ganz eben so verhält es sich mit den Kegelschnitten M_1^2, mit $B(M_1^2)$, welche die Tangenten T und U gleicherweise in zwei bestimmten Puncten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{u}$ *berühren, u. s. w.*" — „*Die auf diese Weise bestimmten zwei Paar Berührungspuncte* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{u}$ *liegen in dem obigen Kegelschnitte $\mathfrak{X}^2$, dem Ort der Wechselschnitte* (2.), *und zwar gehen die in* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ *an $\mathfrak{X}^2$ gelegten Tangenten beide durch die Ecke* $\mathfrak{x}$, *und die in* $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ *an denselben gelegten Tangenten beide durch die Ecke* $\mathfrak{x}_1$, *so dafs also in Bezug auf $\mathfrak{X}^2$ verkehrt $\mathfrak{M}$ die Polare von $\mathfrak{x}_1$, und $\mathfrak{M}_1$ die Polare von* $\mathfrak{x}$ *ist.*" Bei Voraussetzung der vier Puncte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{u}$ kann man umgekehrt sagen: „*Jeder Kegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ (oder $\mathfrak{M}_1^2$), welcher die Tangenten R und S (oder T und U) in den Puncten* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{s}$ *(oder* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{u}$*) berührt, hat mit den gegebenen Curven A^2 und B^2, aufser jenen Tangenten noch zwei solche Paare Tangenten gemein, P und P_1, Q und Q_1, welche zugleich die Berührungstangenten derselben mit einer Curve C_x^2 sind.*" Und ferner: „*Die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Curven C_x^2 berühren allemal zugleich einen der Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ sowohl, als auch einen der Kegelschnitte $\mathfrak{M}_1^2$; und umgekehrt: jeder Kegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ oder $\mathfrak{M}_1^2$ hat mit jeder Curve C_x^2 solche vier Tangenten gemein, welche allemal auch noch von einer andern Curve $C_{\mathfrak{r}}^2$ berührt werden.*"

IV. *„Legt man an jede Curve C_x^2, in ihren beiden Schnitten mit der Seite $\mathfrak{Y}$* (I.), *die Tangenten, so geht von diesen zwei Tangenten stets die eine durch die Ecke $\mathfrak{z}$ und die andere durch die Ecke $\mathfrak{z}_1$; und eben so geht von den zwei Tangenten derselben Curve C_x^2, in ihren Schnitten mit der Seite $\mathfrak{Y}_1$, immer die eine durch $\mathfrak{z}$ und die andere durch $\mathfrak{z}_1$."* Oder umgekehrt: *„Zieht man aus der Ecke $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}_1$ an eine Curve C_x^2 die beiden Tangenten, so liegt allemal der Berührungspunct der einen Tangente in der Seite $\mathfrak{Y}$ und der Berührungspunct der andern in der Seite $\mathfrak{Y}_1$." — „Und gleicherweise geht von den zwei Tangenten jeder Curve C_x^2, in ihren Schnitten mit der Seite $\mathfrak{Z}$ oder $\mathfrak{Z}_1$, allemal die eine durch die Ecke $\mathfrak{y}$ und die andere durch die Ecke $\mathfrak{y}_1$; oder umgekehrt: von den Berührungspuncten der aus der Ecke $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ an jede Curve C_x^2 gezogenen zwei Tangenten, liegt der eine in der Seite $\mathfrak{Z}$ und der andere in der Seite $\mathfrak{Z}_1$."*

Alle vorstehenden, sich auf die $S(C_x^2)$ allein beziehenden Sätze finden analogerweise, wie schon bemerkt worden, auch für die beiden andern Schaaren, $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$, statt, so dafs also jeder Satz dreifach vorhanden ist. Die jedesmaligen zusammengehörigen Elemente sind leicht zu erkennen. Z. B. beim Satze (IV.), wo ungleichnamige Elemente zusammengehören, ist die Verbindung:

$$S(C_x^2) \text{ mit } \begin{Bmatrix} \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1 \text{ und } \mathfrak{z},\ \mathfrak{z}_1; \\ \mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}_1 \text{ und } \mathfrak{y},\ \mathfrak{y}_1; \end{Bmatrix}$$

und danach ist die Verbindung für die beiden andern Fälle:

$$S(C_y^2) \text{ mit } \begin{Bmatrix} \mathfrak{X},\ \mathfrak{X}_1 \text{ und } \mathfrak{z},\ \mathfrak{z}_1; \\ \mathfrak{Z},\ \mathfrak{Z}_1 \text{ und } \mathfrak{x},\ \mathfrak{x}_1; \end{Bmatrix}; \text{ und } S(C_z^2) \text{ mit } \begin{Bmatrix} \mathfrak{X},\ \mathfrak{X}_1 \text{ und } \mathfrak{y},\ \mathfrak{y}_1; \\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Y}_1 \text{ und } \mathfrak{x},\ \mathfrak{x}_1. \end{Bmatrix}$$

Es giebt aber auch Sätze, welche sich auf zwei Schaaren zugleich beziehen, wie z. B. die folgenden.

V. 1) *„Alle Pole der Seite $\mathfrak{X}$ in Bezug auf die $S(C_y^2)$ sowohl als in Bezug auf die $S(C_z^2)$, nebst ihren beiden Polen a und b in Bezug auf A^2 und B^2, liegen insgesammt in einem und demselben Kegelschnitte M_x^2, welcher mit zum obigen Büschel $B(M^2)$* (II. 4.) *gehört, daher durch die Ecken r und s geht und daselbst die Geraden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ berührt, und welcher ferner auch durch die zwei Paar Gegenecken $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ des Vierseits $RSTU$ geht." „Gleicherweise liegen die gesammten Pole der Seite $\mathfrak{X}_1$ in Bezug auf $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$, nebst ihren Polen a_1 und b_1 in Bezug auf A^2 und B^2, in einem Kegelschnitte M_{1x}^2, welcher zum obigen $B(M_1^2)$* (II. 4.) *gehört, daher durch die Ecken t und u geht und daselbst*

die $\mathfrak{X}$ *und* $\mathfrak{U}$ *berührt, und welcher ferner auch durch die nämlichen Gegenecken* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}$ *und* $\mathfrak{z}_1$ *geht.*" — Auch dieser Satz findet dreifach statt; nämlich in Rücksicht auf jedes der drei Paar Gegenseiten des Vierecks *rstu* und der beiden mit dem jedesmaligen Paar ungleichnamigen Schaaren.

2) „*Alle Polaren der Ecke* $\mathfrak{x}$ *in Bezug auf* $S(C_y^2)$ *und* $S(C_z^2)$, *nebst ihren Polaren* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *in Bezug auf* A^2 *und* B^2, *berühren insgesammt einen bestimmten Kegelschnitt* $\mathfrak{M}_x^2$, *welcher zum obigen* $B(\mathfrak{M}^2)$ (III. 4.) *gehört und daher die Tangenten R und S in den Puncten* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{s}$ *berührt, und welcher ferner auch die zwei Paar Gegenseiten* $\mathfrak{Y}$ *und* $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{Z}_1$ *des Vierecks rstu zu Tangenten hat.*" „*Und gleicherweise berühren alle Polaren der Ecke* $\mathfrak{x}_1$ *in Bezug auf* $S(C_y^2)$ *und* $S(C_z^2)$, *nebst ihren Polaren* $\mathfrak{A}_1$ *und* $\mathfrak{B}_1$ *in Bezug auf* A^2 *und* B^2, *einen Kegelschnitt* $\mathfrak{M}_{1x}^2$, *welcher zum obigen* $B(\mathfrak{M}_1^2)$ *gehört, und daher die Tangenten T und U in den bestimmten Puncten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{u}$, *so wie ferner auch die Seiten* $\mathfrak{Y}$ *und* $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{Z}_1$ *berührt.*"

VI. *Bemerkung.* Die angegebenen Eigenschaften gelten für den vorausgesetzten Fall, dafs sowohl die vier gegenseitigen Schnitte als die vier gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kegelschnitte A^2 und B^2 reell sind, wobei jedoch die letztern nicht gerade Ellipsen sein müssen, sondern von beliebiger Art sein können. Von diesem Falle aus kann man zu den übrigen Fällen übergehen, bei welchen je ein Theil der genannten Elemente imaginär wird. Die wesentlichsten Fälle der Art sind folgende drei. Wenn die gegenseitige Lage der gegebenen, beliebigen Kegelschnitte A^2 und B^2 so beschaffen ist, dafs entweder: 1) nur die vier Schnitte *r, s, t* und *u* reell, dagegen die vier gemeinschaftlichen Tangenten imaginär; oder 2) nur die vier gemeinschaftlichen Tangenten reell, dagegen die vier Schnitte imaginär; oder endlich 3) nur zwei Schnitte und nur zwei gemeinschaftliche Tangenten reell sind. Bei diesen drei Fällen wird dann auch von den übrigen, oben beschriebenen (I.) Elementen je ein Theil imaginär, wodurch in den angegebenen Eigenschaften und Sätzen entsprechende, wenig oder mehr erhebliche Änderungen eintreten; ähnlich wie oben §. 8. So tritt z. B., wenn etwa die Gegenseiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ imaginär werden, aber ihr Schnitt, der Pol x, reell bleibt, bei dem Satze (II. 1.) die Änderung ein, dafs die sämmtlichen Paare Berührungssehnen pp_1 und $q\mathfrak{q}_1$ ein *elliptisches* Strahlen-System bilden, wogegen sie dort ein *hyperbolisches* bilden. U. s. w.

§. 11.

I. In Rücksicht der vorstehenden allgemeinen Sätze (§. 10.) sollen hier noch folgende, in denselben mit inbegriffene, specielle Sätze besonders herausgehoben werden.

1) „*Werden einem vollständigen Vierseit* **RSTU** *irgend zwei Kegelschnitte* A^2 *und* B^2 *eingeschrieben, so liegen die* 8 *Puncte, in welchen sie die Seiten berühren, allemal in irgend einem dritten Kegelschnitte* D^2." Und: „*Legt man durch die vier Puncte* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{u}$, *in welchen ein beliebiger Kegelschnitt* A^2 *die Seiten* R, S, T *und* U *des Vierseits berührt, einen willkürlichen Kegelschnitt* D^2, *so schneidet dieser die Seiten in vier solchen neuen Puncten* $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$ *und* $\mathfrak{u}_1$, *in welchen dieselben allemal von irgend einem Kegelschnitte* B^2 *berührt werden.*" *) — Ferner: „*Die gegenseitigen vier Schnitte* r, s, t, u *je zweier demselben Vierseit* **RSTU** *eingeschriebenen Kegelschnitte* A^2 *und* B^2 *liegen mit jedem Paar Gegenecken des Vierseits, also sowohl mit* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{x}_1$, *als* $\mathfrak{y}$ *und* $\mathfrak{y}_1$, *und* $\mathfrak{z}$ *und* $\mathfrak{z}_1$, *zusammen in einem Kegelschnitte, beziehlich* $\mathfrak{X}^2$, $\mathfrak{Y}^2$ *und* $\mathfrak{Z}^2$." Und ferner: „*Von den* 8 *Berührungspuncten* ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$; $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{u}_1$) *je zweier dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte* A^2 *und* B^2 *liegen* 12 *mal* 4 *mit irgend zwei der vier Schnitte* r, s, t, u *der letztern zusammen in einem Kegelschnitte* M^2 *(oder* M_1^2*), und diese* 12 *Kegelschnitte ordnen sich in* 6 *Paare, welche einander doppelt berühren; nämlich durch je zwei der vier Schnitte* r, s, t, u *gehen zwei Kegelschnitte* M^2 *und berühren sich in denselben. Die je* 6 *Puncte, welche zusammen in einem Kegelschnitte* M^2 *liegen, sind:*

$$\left|\begin{matrix}\mathfrak{r}, & \mathfrak{s}, & \mathfrak{r}_1, & \mathfrak{s}_1\\ \mathfrak{t}, & \mathfrak{u}, & \mathfrak{t}_1, & \mathfrak{u}_1\end{matrix}\right| \text{ mit } \left|\begin{matrix}r, & s\\ t, & u\end{matrix}\right|;\quad \left|\begin{matrix}\mathfrak{r}, & \mathfrak{t}, & \mathfrak{r}_1, & \mathfrak{t}_1\\ \mathfrak{s}, & \mathfrak{u}, & \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{u}_1\end{matrix}\right| \text{ mit } \left|\begin{matrix}r, & t\\ s, & u\end{matrix}\right|;\quad \left|\begin{matrix}\mathfrak{r}, & \mathfrak{u}, & \mathfrak{r}_1, & \mathfrak{u}_1\\ \mathfrak{s}, & \mathfrak{t}, & \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{t}_1\end{matrix}\right| \text{ mit } \left|\begin{matrix}r, & u\\ s, & t\end{matrix}\right|,$$

d. h. beide vier Puncte in der ersten Klammer liegen mit jedem Paar in der zweiten Klammer in einem M^2."

2) „*Werden einem Viereck* **rstu** *zwei beliebige Kegelschnitte* A^2 *und* B^2 *umgeschrieben und in den vier Ecken an dieselben Tangenten gelegt, so berühren die* 8 *Tangenten allemal irgend einen dritten Kegelschnitt* D^2." Und: „*Ist dem Viereck ein beliebiger Kegelschnitt* A^2 *umgeschrieben und werden dessen Tangenten* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ *und* $\mathfrak{U}$, *in den Ecken* r, s, t *und* u *des Vierecks, von einem willkürlichen Kegelschnitte* D^2 *be-*

*) Die diesen zwei Sätzen analogen Sätze in Bezug auf das Dreiseit habe ich schon früher, 1828, in den *Gergonne*'schen *Annales des Mathem.* t. XIX. oder XX. bewiesen.

rührt, so gehen aus den Ecken an den letztern noch vier solche neue Tangenten $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{U}_1$, welche in den Ecken allemal von irgend einem Kegelschnitte B^2 berührt werden." Ferner: *„Die vier gemeinschaftlichen Tangenten R, S, T, U je zweier demselben Viereck rstu umgeschriebenen Kegelschnitte A^2 und B^2 werden mit jedem der drei Paar Gegenseiten des Vierecks, (mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$), zusammen von einem Kegelschnitte (X^2, Y^2, Z^2) berührt."* Und ferner: *„Bei je zwei dem Viereck rstu umgeschriebenen Kegelschnitten A^2 und B^2 werden von ihren 8 Tangenten ($\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{U}_1$) in den Ecken 12 mal 4 mit irgend zwei ihrer 4 gemeinschaftlichen Tangenten (R, S, T, U) zusammen von irgend einem Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ berührt; und zwar ordnen sich diese 12 Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ in 6 einander doppelt berührende Paare, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten R, S, T und U, paarweise genommen, zu Berührungstangenten haben."*

II. Von der obigen Betrachtung (§. 10.) kann man auch zu denjenigen besondern Fällen übergehen, wobei die gegebenen Kegelschnitte A^2 und B^2, einzeln genommen, aus einem Paar Puncten oder Geraden bestehen. In dieser Hinsicht sind folgende fünf Fälle zu beachten.

1) Wenn etwa B^2 aus zwei Geraden $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ besteht, so sind diese ein Paar Gegenseiten des Vierecks *rstu*, und ihr gegenseitiger Schnitt ist der Pol *z*. Die vier gemeinschaftlichen Tangenten *R*, *S*, *T* und *U* fallen paarweise zusammen, (*RU*) und (*ST*), und sind die aus dem Pol *z* an die Curve A^2 gehenden zwei Tangenten. Dadurch vereinigen sich von den sechs Ecken des früheren Vierseits *RSTU* zwei Paar, nämlich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ mit dem Puncte *z*, und die zwei übrigen, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$, sind die Berührungspuncte jener Tangenten (*RU*) und (*ST*), liegen in der Polare *Z* und sind zu den Polen *x* und *y* zugeordnet harmonisch. Hierbei artet die $S(C_z^2)$ in einen Strahlbüschel um den Mittelpunct *z* aus, d. h. jeder durch *z* gehende Strahl (Gerade), doppelt gedacht, ist als eine C_z^2 anzusehen, seine Schnitte mit A^2 sind zugleich seine Berührungspuncte mit A^2, wogegen seine Berührungspuncte mit $B^2=(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1)$ in *z* vereinigt liegen. Die Schaaren $S(C_x^2)$ und $S(C_y^2)$ bleiben eigentliche Curven und behalten ihre obigen Eigenschaften, jedoch zum Theil mit angemessenen Modificationen.

2) Wenn B^2 aus zwei Puncten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ besteht, so sind diese ein Paar Gegenecken des Vierseits *RSTU* und liegen in der Polare *Z*. Die vier Schnitte *r*, *s*, *t* und *u* rücken paarweise zusammen, (*ru*) und (*st*), in

die Schnitte von $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 = Z$ mit der Curve A^2, so dafs zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $rstu$, nämlich $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}_1$, auf Z fallen, und das dritte Paar, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$, die Tangenten an A^2 in jenen Puncten (ru) und (st) werden, einander in z schneiden und zu den Polaren X und Y zugeordnet harmonisch sind. Hier besteht die $S(C_z^2)$ aus allen Paaren Tangenten der Curve A^2, welche sich auf der Geraden Z schneiden. Dagegen enthalten $S(C_x^2)$ und $S(C_y^2)$ alle eigentlichen Kegelschnitte C^2, welche durch die gegebenen Puncte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$ gehen und die gegebene Curve A^2 doppelt berühren.

3) Wenn A^2 und B^2 aus zwei Paar Geraden $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ bestehen, so sind sie als zwei Paar Gegenseiten des Vierecks $rstu$ anzusehen, ihre eigenen Schnitte als die Pole y und z, ihre Wechselschnitte als die Schnitte r, s, t und u. Die vier gemeinschaftlichen Tangenten R, S, T und U fallen alle auf die Gerade $yz = X$. Die Schaaren $S(C_y^2)$ und $S(C_z^2)$ arten in Strahlbüschel um die Pole y und z aus, in gleichem Sinne wie oben (1.), und es bleibt nur die $S(C_x^2)$ als eigentliche Curven übrig, deren Berührungssehnen durch den Pol x, deren Wechselsehnen dagegen paarweise durch die Pole y und z gehen (§. 10. II.).

4) Wenn A^2 und B^2 aus zwei Paar Puncten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ bestehen, so sind sie als Gegenecken des Vierseits $RSTU$ anzusehen, die sie verbindenden Geraden $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ als die Polaren Y und Z, und die beide Paare wechselseitig verbindenden Geraden als die gemeinschaftlichen Tangenten R, S, T und U. Die vier Schnitte r, s, t und u liegen alle im Pol $x = YZ$ vereint. Die $S(C_y^2)$ artet aus in alle Paare Gerade, welche durch die Puncte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ gehen und sich auf Y schneiden; und eben so besteht die $S(C_z^2)$ aus allen Paaren Gerade, welche durch $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ gehen und sich auf Z schneiden. Die $S(C_x^2)$ bleiben eigentliche Curven, die dem Viereck $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ umgeschrieben sind.

5) Wenn endlich A^2 aus zwei Puncten $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$, und B^2 aus zwei Geraden $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ besteht, so sind sie als die durch diese Bezeichnung angedeuteten Elemente anzusehen, so dafs ferner die Gerade $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 = Z$ und der Schnitt $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1 = z$ ist. Die vier gemeinschaftlichen Tangenten fallen paarweise auf die Geraden $z\mathfrak{z}$ und $z\mathfrak{z}_1$, nämlich $(RU) = z\mathfrak{z}$ und $(ST) = z\mathfrak{z}_1$, und daher liegen die zwei Paar Gegenecken $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ in z vereint. Eben so fallen die vier Schnitte r, s, t, u paarweise (r und u, s und t) zusammen, in die Schnitte von Z mit $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$, so dafs $(ru) = Z\mathfrak{Z}$ und $(st) = Z\mathfrak{Z}_1$; und daher fallen die beiden Paar Gegenseiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}$ und

$\mathfrak{Y}_1$ auf $\mathbf{Z}$, aber trotzdem bleiben ihre Schnitte, die Pole x und y, dennoch dadurch bestimmt, dafs sie sowohl zu $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$, als zu den Schnitten $\mathbf{Z}\mathfrak{Z}$ und $\mathbf{Z}\mathfrak{Z}_1$ zugeordnet harmonisch sind. Die $S(C_z^2)$ arten in den Strahlbüschel um z aus. Dagegen enthalten die $S(C_x^2)$ und $S(C_y^2)$ eigentliche Curven, welche durch die Puncte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ gehen und die Geraden $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ berühren.

III. Gestützt auf diese besondern Fälle (II.), so wie auf den obigen allgemeinen Fall (§. 10.), lassen sich folgende Aufgaben leicht behandeln und die Zahl ihrer Lösungen im Voraus bestimmen.

1) *„Eine Curve C^2 zu finden, welche zwei gegebene Kegelschnitte A^2 und B^2 doppelt berührt und zudem noch entweder*

α. eine gegebene Gerade G berührt; oder

β. durch einen gegebenen Punct p geht."

Jede dieser beiden Aufgaben gestattet sechs Lösungen, und zwar bestehen die lösenden Curven aus $2C_x^2$, $2C_y^2$ und $2C_z^2$. Die gegenseitigen vier Schnitte des Curvenpaars $2C_x^2$, etwa p, p_1, p_2 und p_3, liegen in einem der Kegelschnitte M^2 (§. 10. II. 4.), welcher durch den gegebenen Punct p bestimmt ist; die drei andern Schnitte p_1, p_2, p_3 sind dadurch bestimmt, dafs einer derselben, etwa p_2, in der Geraden xp liegt und dann auch die Gerade p_1p_3 durch x geht, und zudem beide Gerade pp_2 und p_1p_3 zu den Seiten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ zugeordnet harmonisch sind.

2) *„Eine Curve C^2 zu finden, welche eine gegebene Curve A^2 doppelt berührt und nebstdem noch entweder*

α. drei gegebene Gerade $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$ und G berührt; oder

β. zwei gegebene Gerade $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ berührt und durch einen gegebenen Punct p geht; oder

γ. eine gegebene Gerade G berührt und durch zwei gegebene Puncte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ geht; oder endlich

δ. durch drei gegebene Puncte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$ und p geht."

Bei jeder dieser vier Aufgaben finden, im Allgemeinen, sechs Lösungen statt; wie vorhin (1.).

3) *„Eine Curve C^2 zu finden, welche entweder*

α. drei gegebene Gerade $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$ und G berührt und durch zwei gegebene Puncte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$ geht; oder

β. zwei gegebene Gerade $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ berührt und durch drei gegebene Puncte $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$ und p geht."

Beide Mal vier Lösungen.

4) *„Eine Curve C^2 zu finden, welche entweder*

α. *vier gegebene Gerade berührt* (II. 3.) *und durch einen gegebenen Punct p geht; oder*

β. *durch vier gegebene Puncte geht* (II. 4.) *und eine gegebene Gerade G berührt."*

Beide Mal zwei Lösungen. Und endlich:

5) *„Eine Curve C^2 zu finden, welche entweder*

α. *fünf gegebene Gerade berührt; oder*

β. *durch gegebene fünf Puncte geht;"*

beide Mal nur eine Lösung, oder C^2 absolut bestimmt.

§. 12.

Bemerkung. Die Aufgabe:

„Eine Curve C^2 zu finden, welche drei gegebene Curven A^2, B^2 und D^2 doppelt berührt,"

ist im Allgemeinen unmöglich, wie aus dem obigen (§. 10.) leicht erhellet; sie wird erst dann möglich, wenn die gegebenen Curven eine gewisse nähere Beziehung zu einander haben, was bereits schon in der mehrerwähnten Abhandlung (Bd. 37. S. 187 d. Journ.) angegeben worden, und wovon man sich, wie folgt, leicht überzeugen kann.

Denn angenommen die Curve C^2 berühre jede der drei gegebenen Curven A^2, B^2 und D^2 doppelt; seien etwa A, B und D beziehlich die Berührungssehnen, und seien ferner x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' die gemeinschaftlichen Trippel conjugirte Pole, so wie X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' die gemeinschaftlichen Trippel conjugirte Polaren der Curvenpaare A^2 und B^2, A^2 und D^2, B^2 und D^2: so mufs die Berührungssehne A sowohl durch einen Pol des ersten Trippels, etwa durch x, als auch durch einen Pol des zweiten Trippels, etwa durch x', gehen (weil A^2 zum ersten und zweiten Curvenpaar gehört) (§. 10. II. 1.), und dann müssen auch die Berührungssehnen B und D bezieblich durch die nämlichen Pole x und x', so wie auch beide durch einen und denselben Pol des dritten Trippels, etwa durch x'', gehen. Demnach müssen die drei Berührungssehnen A, B und D allemal die Seiten eines solchen Dreiecks sein, welches irgend drei Pole, jedoch von jedem Trippel einen, zu Ecken hat, wie das Dreieck $xx'x''$; die Combination gestattet 27 solche Dreiecke. Da nun ferner sowohl x und X, als x' und X', so wie x'' und X'' Pol und Polare in Bezug auf die Curve C^2 sind (§. 10. II. 3.), so mufs das Dreieck $x x'x''$ mit dem Dreiseit $XX'X''$

perspectivisch liegen; d. h. die drei Geraden, welche ihre Ecken in bestimmter Ordnung paarweise verbinden, treffen sich in irgend einem Puncte p, und die drei Schnitte der entsprechenden Seitenpaare liegen in irgend einer Geraden P; nämlich heifsen die den Seiten X, X', X'' gegenüber liegenden Ecken des Dreiseits beziehlich a, b, d (sie sind zugleich die Pole der Seiten A, B, D, des Dreiecks $xx'x''$ in Bezug auf die Curve C^2 sowohl als beziehlich in Bezug auf A^2, B^2, D^2), so treffen sich die drei Geraden ax, bx', dx'' in einem Puncte p, und die drei Schnitte AX, BX', DX'' liegen in einer Geraden P (auch sind p und P Pol und Polare in Rücksicht auf C^2). — Zu diesen Eigenschaften gesellen sich ferner noch folgende. Bezeichnet man die gegenseitigen vier Schnitte der drei Curvenpaare durch r, s, t, u; r', s', t', u'; r'', s'', t'', u'' und ihre vier gemeinschaftlichen Tangenten durch R, S, T, U; R', S', T', U'; R'', S'', T'', U'', und gleicherweise die übrigen Elemente: so gehen durch die Pole x, x', x'' beziehlich die Seitenpaare $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}_1'$, $\mathfrak{X}''$ und $\mathfrak{X}_1''$, und in den Polaren X, X', X'' liegen beziehlich die Eckenpaare $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}_1''$; und alsdann schneiden sich von den erstern viermal drei in einem Puncte, etwa $\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1'\mathfrak{X}_1''$, $\mathfrak{X}'\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1''$ und $\mathfrak{X}''\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'$, und von den letztern liegen viermal drei in einer Geraden, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1'\mathfrak{x}_1''$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1''$ und $\mathfrak{x}''\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'$.

Wenn also eine Curve C^2 die drei gegebenen Curven A^2, B^2, D^2 doppelt berührt, so müssen die den letztern zugehörigen Elemente, unter andern, die angegebenen Eigenschaften haben; da aber diese Eigenschaften einander bedingen, selbst von einander abhängig sind, so beschränkt sich die Bedingung für die Möglichkeit der Curve C^2 nur auf je einen Theil derselben, nämlich:

Die Curve C^2, welche die drei gegebenen Curven A^2, B^2 und *D^2 doppelt berühren soll, ist möglich, sobald entweder:*

1) *von den 27 Dreiecken, welche je drei Pole, jedoch von jedem Trippel einen, zu Ecken haben, irgend eins (wie $xx'x''$) mit dem ihm entsprechenden Dreiseit ($XX'X''$) perspectivisch liegt; oder*

2) *von den Seiten der drei Vierecke $rstu$, $r's't'u'$, $r''s''t''u''$ irgend drei, worunter jedoch von jedem Viereck eine (wie etwa $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$) sich in einem Puncte p treffen; oder endlich*

3) *von den Ecken der drei Vierseit $RSTU$, $R'S'T'U'$, $R''S''T''U''$ irgend drei, unter denen jedoch von jedem Vierseit eine (wie etwa $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$) in einer Geraden P liegen.*"

Berlin, im März 1852.

16.

Darstellung einer beliebigen gegebenen Gröfse durch sin am $(u+w,k)$.

(Von Herrn Dr. *Richelot*, prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

Eine bei der Anwendung der elliptischen Functionen sich öfters darbietende Aufgabe besteht darin, für einen gegebenen Modul k eine beliebige gegebene Gröfse durch $\sin\operatorname{am}(u,k)$ auszudrücken.

Für den Fall, dafs diese gegebene Gröfse $(=A)$ reell ist, findet man die Bestimmung von u in (§. 69.) der „*Fundamenta*," bei Gelegenheit der Reduction des von *Legendre* benutzten Parameters der Integrale dritter Gattung, auf den von *Jacobi* eingeführten Parameter, und hat demgemäfs, während A resp.

positiv und kleiner als 1,
positiv und gröfser als 1, aber kleiner als $\frac{1}{k}$,
positiv und gröfser als $\frac{1}{k}$

ist, respective

$$(1.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u,k) = A, \\ \sin\operatorname{am}(K+iu,k) = A, \\ \sin\operatorname{am}(iK_1+u,k) = A \end{cases}$$

zu setzen, wo K und K_1 die bekannte Bedeutung haben. Zur Bestimmung des Arguments u selbst, dienen dann respective die Formeln

$$(2.)\quad \begin{cases} u = \int_0^{A} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}}, & \text{oder } u = K - \int_0^{\sqrt{\frac{1-A^2}{1-k^2A^2}}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}}, \\ u = \int_0^{\frac{\sqrt{(A^2-1)}}{k_1 A}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}}, & \text{oder } u = K_1 - \int_0^{\sqrt{(1-k^2A^2)}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}}, \\ u = \int_0^{\frac{1}{kA}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}}, & \text{oder } u = K - \int_0^{\sqrt{\frac{k^2A^2-1}{A^2-1}}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}}. \end{cases}$$

Ist die gegebene Gröfse $= iA_1$, wo A_1 reell und positiv ist, so hat man

$$(3.)\quad iA_1 = \sin\operatorname{am}(iv,k)$$

zu setzen, und bedient sich zur Bestimmung des Arguments v der Formel

$$(4.)\quad v=\int_0^{\frac{A_1}{\sqrt{(1+A_1^2)}}}\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}},\ \text{oder}\ v=K_1-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{(1+k_1^2A^2)}}}\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}}.$$

Für den Fall, dafs die Gröfsen A und A_1 negativ sind, hat man respective

$$A = \sin\operatorname{am}(-u,k),$$
$$A = \sin\operatorname{am}(-K-iu,k),$$
$$A = \sin\operatorname{am}(-iK_1-u,k),$$
$$iA_1 = \sin\operatorname{am}(-iv,k),$$

und in den obern Grenzen der Integrale (2. und 4.) statt A und A_1 respective $-A$ und $-A_1$ zu setzen.

Wenn die gegebene Gröfse einen beliebigen imaginären Werth hat, so läfst sich die Auflösung der vorliegenden Aufgabe aus den Grundformeln der elliptischen Functionen für die Summe und Differenz zweier beliebiger reeller oder imaginärer Argumente, welche sich aus den (§§. 18. und 19.) der „*Fundamenta*" ergeben, auf verschiedene Weise ableiten. Die in den folgenden Zeilen von mir mitzutheilende Art scheint mir die einfachste zu sein.

Die gegebene Gröfse sei auf die Form

$$\varrho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

gebracht, wo ϱ eine reelle Gröfse ist und der Winkel θ die Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ nicht überschreitet. Setzt man nun

$$(5.)\quad \varrho(\cos\theta+i\sin\theta) = \sin\operatorname{am}((u+iv),k),$$

so reducirt man die Fälle, wo ϱ negativ ist, auf die Fälle wo ϱ positiv ist, dadurch, dafs man den in den letztern gefundenen Werthen von u und v das entgegengesetzte Zeichen giebt. Es darf daher ϱ positiv angenommen werden. Ferner kann man, wegen der doppelten Periodicität der Function **sin am**, die Aufgabe dahin modificiren, dafs nur die, die Grenzen $-K$ und $+K$ nicht überschreitenden Werthe von u, und die die Grenzen $-K_1$ und $+K_1$ nicht überschreitenden Werthe von v gesucht werden.

Zu diesem Ende führe ich die kleinsten positiven Winkel ein, welche den Formeln

$$(6.)\quad \sin\varphi = \frac{2\varrho\cos\theta}{1+\varrho^2},\qquad \sin\psi = \frac{2k\varrho\cos\theta}{1+k^2\varrho^2}$$

genügen, und bestimme die Argumente u und v aus den Formeln

$$(7.)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u,k) = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi\right)}, \\ \Delta\operatorname{am}(v,k_1) = \sqrt{(k\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{cotang}\frac{1}{2}\psi)} \end{cases}$$

in der Art, dafs man für u den kleinsten positiven und für v denjenigen kleinsten reellen genügenden Werth nimmt, dessen Zeichen mit dem Zeichen von θ übereinstimmt.

Der Beweis dieser Behauptung ist folgender. Setzt man der Kurze wegen die Function

$$\sqrt{(1+2x\cos\theta+x^2)} = f(x),$$

wo, wie überall im Folgenden, das Wurzelzeichen den positiven Werth verlangt, so erhält man leicht aus den angenommenen Formeln die folgenden:

$$(8.)\quad \sin\mathrm{am}(u,k) = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\left(\frac{f(\varrho)-f(-\varrho)}{f(\varrho)+f(-\varrho)}\right)\left(\frac{f(k\varrho)-f(-k\varrho)}{f(k\varrho)+f(-k\varrho)}\right)\right)},$$

$$(9.)\quad \Delta\mathrm{am}(v,k_1) = \sqrt{\left(k\left(\frac{f(\varrho)-f(-\varrho)}{f(\varrho)+f(-\varrho)}\right)\left(\frac{f(k\varrho)+f(-k\varrho)}{f(k\varrho)-f(-k\varrho)}\right)\right)},$$

oder, da identisch

$$\left(\frac{f(k\varrho)+f(-k\varrho)}{f(\varrho)+f(-\varrho)}\right)\left(\frac{f(k\varrho)-f(-k\varrho)}{f(\varrho)-f(-\varrho)}\right) = k$$

ist, folgende:

$$(10.)\quad \sin\mathrm{am}(u,k) = \frac{f(\varrho)-f(-\varrho)}{f(k\varrho)+f(-k\varrho)},$$

$$(11.)\quad \Delta\mathrm{am}(v,k_1) = \frac{f(k\varrho)+f(-k\varrho)}{f(\varrho)+f(-\varrho)},$$

deren letztere auch folgende Form annimmt:

$$(12.)\quad \Delta\mathrm{am}(v,k_1) = k\cdot\frac{f\left(\frac{1}{k\varrho}\right)+f\left(-\frac{1}{k\varrho}\right)}{f\left(\frac{1}{\varrho}\right)+f\left(-\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right.}.$$

Da nun die Functionen

$$(13.)\quad \begin{cases} f(x)\pm f(-x) \\ = 2\sqrt{\{(1+x^2)\pm\sqrt{((1+x^2)^2-4x^2\cos^2\theta)}\}}, \end{cases}$$

weil ihr Differentialquotient nach x^2,

$$= \frac{\sqrt{((1+x^2)^2-4x^2\cos^2\theta)}\pm(1+x^2-2\cos^2\theta)}{\sqrt{((1+x^2)^2-4x^2\cos^2\theta)}}$$

oder, nach leichter Reduction,

$$= \frac{\sqrt{((x^2-\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta)}\pm(x^2-\cos 2\theta)}{\sqrt{((x^2-\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta)}}$$

für jeden reellen Werth von x^2 stets positiv bleibt, selbst stets mit x^2 zugleich wachsen, so ist leicht zu sehen, dafs die Werthe von $\Delta\mathrm{am}(v,k_1)$ die Grenzen k und 1 und die Werthe von $\sin\mathrm{am}\, u,k$ stets die Grenzen 0 und 1

nicht überschreiten. Jenes folgt aus den Formeln (11. und 12.), dieses aus der Formel (10.), da $\cos\theta = \frac{f\infty - f(-\infty)}{f0+f0} < \frac{f(\varrho)-f(-\varrho)}{f(k\varrho)+f(-k\varrho)}$ ist. Es *giebt* daher stets *einen* die Grenzen 0 und 1 nicht überschreitenden Werth von u, und einen die Grenzen $-K_1$ und K_1 nicht überschreitenden Werth von v.

Aus den Formeln (8. und 9.) ergeben sich aber ferner die Gleichungen

$$\frac{f(\varrho)-f(-\varrho)}{f(\varrho)+f(-\varrho)} = \sin\mathrm{am}(u,k)\,\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1),$$
$$\frac{f(k\varrho)-f(-k\varrho)}{f(k\varrho)+f-k\varrho)} = k\frac{\sin\mathrm{am}(u,k)}{\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)},$$

und hieraus folgende, in welchen die obern und untern Zeichen auf beiden Seiten zusammengehören:

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{f(\pm\varrho)}{f(k\varrho)} = \dfrac{1\pm\sin\mathrm{am}(u,k)\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)+k\sin\mathrm{am}(u,k)}, \\ \dfrac{f(\pm\varrho)}{f(-k\varrho)} = \dfrac{1\pm\sin\mathrm{am}(u,k)\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)-k\sin\mathrm{am}(v,k)}. \end{cases}$$

Da nun die Formeln (16. und 18. §. 18.) der „*Fundamenta*", wenn man iv statt v setzt und die Formeln (1. 2. 4. §. 19.) benutzt, nach gegenseitiger Division, in die folgenden übergehen:

$$\frac{((1\pm\ \sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u-iv,k))}{((1+k\sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1+k\sin\mathrm{am}(u-iv,k))} = \left(\frac{1\pm\sin\mathrm{am}(u,k)\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)+k\sin\mathrm{am}(u,k)}\right)^2,$$
$$\frac{(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u-iv,k))}{(1-k\sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1-k\sin\mathrm{am}(u-iv,k))} = \left(\frac{1\pm\sin\mathrm{am}(u,k)\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(v,k_1)-k\sin\mathrm{am}(u,k)}\right)^2,$$

so erhält man, mit gehöriger Benutzung der identischen Gleichungen

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta},$$
$$(1+xe^{i\theta})(1+xe^{-i\theta}) = (fx)^2,$$

aus den Formeln (14.) folgende Gleichungen:

$$\frac{(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u-iv,k))}{(1+k\sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1+k\sin\mathrm{am}(u-iv,k))} = \frac{(1\pm\varrho e^{i\theta})(1\pm\varrho e^{-i\theta})}{(1+k\varrho e^{i\theta})(1+k\varrho e^{-i\theta})},$$
$$\frac{(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1\pm\ \sin\mathrm{am}(u-iv,k))}{(1-k\sin\mathrm{am}(u+iv,k))(1-k\sin\mathrm{am}(u-iv,k))} = \frac{(1\pm\varrho e^{i\theta})(1\pm\varrho e^{-i\theta})}{(1-k\varrho e^{i\theta})(1-k\varrho e^{-i\theta})}.$$

Hieraus folgen sofort die Gleichungen

$$\{\sin\mathrm{am}(u+iv,k)\}\{\sin\mathrm{am}(u-iv,k)\} = \varrho^2,$$
$$\sin\mathrm{am}(u+iv,k)+\sin\mathrm{am}(u-iv,k) = 2\varrho\cos\theta,$$

und daher ist $\sin\mathrm{am}(u+iv,k)$ entweder

$$= \varrho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

oder

$$= \varrho(\cos\theta - i\sin\theta).$$

Da nun aber aus der Grundformel (1. §. 18.) der „*Fundamenta*", wenn man iv statt v setzt und die Formeln (§. 19.) anwendet, die Formel

$$(15.)\quad \sin am(u+iv,k)$$
$$= \frac{\sin am(u,k)\Delta am(v,k_1)+i\cos am(u,k)\Delta am(u,k)\sin am(v,k_1)\cos am(v,k_1)}{\cos^2 am(v,k_1)+k^2\sin^2 am(u,k)\sin^2 am(v,k_1)}$$

folgt, deren imaginärer Theil, mit Rücksicht auf die obige Annahme, wenn man u und v innerhalb ihrer oben bezeichneten Grenzen nimmt, das Zeichen von $i\theta$ hat, während ihr reeller Theil positiv ist, so sieht man endlich, dafs die Gleichung

$$\varrho(\cos\theta+i\sin\theta) = \sin am(u+iv,k)$$

besteht; was zu beweisen war.

Um die Argumente u und v aus den Werthen von $\sin am(u,k)$ und $\Delta am(v,k_1)$ zu bestimmen, gehe man wieder auf die Definitionen dieser beiden Functionen durch Integrale zurück. Dies giebt erstens:

$$u = \int_0^{\sin am(u,k)} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}}.$$

Ist $k_1 > k$ und setzt man, was alsdann freisteht,

$$\frac{\Delta am(v,k_1)}{k_1} = \sin\chi,$$

so ist zweitens:

$$v = \pm\int_0^{\frac{\cos\chi}{k_1}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}}.$$

Ist aber $k_1 < k$, so setze man, was dann freisteht:

$$\frac{k_1}{\Delta am(v,k_1)} = \sin\chi,$$

und erhält:

$$v = \pm K_1 \mp \int_0^{\frac{\cos\chi}{k_1}} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}}.$$

Hienach kann man die Argumente u und v entweder mittels der *Legendre*schen Tafeln, oder der auf der Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung beruhenden Näherungsmethode berechnen, wenn man es nicht vorzieht, die Reihen-Entwickelungen für die elliptischen Functionen $\sin am(u,k)$ und $\Delta am(v,k_1)$, und die ähnlichen, zur indirecten Bestimmung von u und v durch die gewöhnlichen Näherungsmethoden zu benutzen.

Es ist wohl nicht überflüssig, einer zweiten Lösung derselben Aufgabe zu erwähnen, welche auf denselben Grundformeln wie die eben mitgetheilte beruht.

Führt man die Winkel φ und ψ, als die, absolut genommen, kleinsten ein, welche den Formeln

$$(16.)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\varrho\sin\theta}{1-\varrho^2},\qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{2k\varrho\sin\theta}{1-k^2\varrho^2}$$

Genüge leisten, so ist u der kleinste reelle positive und v der im Zeichen mit θ übereinstimmende kleinste reelle Werth, welche respective denjenigen der beiden Gleichungen

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tang} am(v,k_1)}{\sin coam(u,k)} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \text{oder} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi+\varphi), \\ \operatorname{tang} am(v,k_1)\sin coam(u,k) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi, \quad \text{oder} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi+\psi) \end{cases}$$

genügen, deren Seiten rechts respective im Zeichen mit θ übereinstimmen.

Der Beweis hievon läfst sich wieder auf die Weise geben, dafs man zuerst die Existenz eines reellen positiven u und eines reellen v, welche den Gleichungen (17.) Genüge leisten, nachweiset. Je nachdem die Winkel

$$\begin{array}{lll} & \varphi, & \psi,\ \theta, \\ \text{oder} & -\varphi, & \psi,\ \theta, \\ \text{oder} & -\varphi, & -\psi,\ \theta \end{array}$$

gleiche Zeichen haben, haben auch die Gröfsen

$$\begin{array}{lll} & 1-\varrho^2, & 1-k^2\varrho^2, \\ \text{oder} & -(1-\varrho^2), & 1-k^2\varrho^2, \\ \text{oder} & -(1-\varrho^2), & -(1-k^2\varrho^2) \end{array}$$

respective positive Werthe, und umgekehrt; so dafs, da nicht zu gleicher Zeit $1-\varrho^2$ und $-(1-k^2\varrho^2)$ positiv sein können, auch der vierte Fall, dafs

$$\varphi,\ -\psi,\ \theta$$

gleiche Zeichen haben, nicht Statt findet. Zugleich hat man respective die aus den Gleichungen (7.) folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \sin^2 coam(u,k) &= \frac{1}{k}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi, \\ \sin^2 coam(u,k) &= -\frac{1}{k}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi, \\ \sin^2 coam(u,k) &= \frac{1}{k}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\psi, \\ \operatorname{tang}^2 am(v,k_1) &= \frac{1}{k}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi, \\ \operatorname{tang}^2 am(v,k_1) &= -\frac{1}{k}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi, \\ \operatorname{tang}^2 am(v,k_1) &= \frac{1}{k}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varphi.\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\psi. \end{aligned}$$

Da die 6 Glieder rechts in diesen Gleichungen in den drei verschiedenen Voraussetzungen positiv sind, so ergiebt sich die Realität von v geradezu, und für u bleibt nur zu zeigen übrig, dafs die drei Werthe für $\sin^2 coam(u,k)$ auch die Grenzen 0 und 1 nicht überschreiten. Mit Hinzuziehung der Formeln (16.) erhält man aber in den drei Fällen respective:

$$(18.)\quad \begin{cases} \sin^2 coam(u,k) = \\ \dfrac{\sqrt{((1-\varrho^2)^2+4\varrho^2\sin^2\theta)}+1-\varrho^2}{\sqrt{((1-k^2\varrho^2)^2+4k^2\varrho^2\sin^2\theta)}+1-k^2\varrho^2}, \\ \sin^2 coam(u,k) = \\ \dfrac{4\sin^2\theta}{\left\{\sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right)^2+\frac{4}{\varrho^2}\sin^2\theta\right)}+1-\frac{1}{\varrho^2}\right\}\left\{\sqrt{((1-k^2\varrho^2)^2+4k^2\varrho^2\sin^2\theta)}+1-k^2\varrho^2\right\}}, \\ \sin^2 coam(u,k_1) = \\ \dfrac{\sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{k^2\varrho^2}\right)^2+\frac{4}{k^2\varrho^2}\sin^2\theta\right)}+1-\frac{1}{k^2\varrho^2}}{\sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right)^2+\frac{4}{\varrho^2}\sin^2\theta\right)}+1-\frac{1}{\varrho^2}}. \end{cases}$$

Da nun aber oben gezeigt ist, dafs die Function

$$2\sqrt{[1+x^2+\sqrt{((1+x^2)^2-4x^2\cos^2\theta)}]},$$

während x^2 von $-\infty$ bis 0 zunimmt, stets selbst wächst, so folgt hieraus auch, dafs die Function

$$\sqrt{((1-z^2)+4z\sin^2\theta)}+1-z,$$

während z von 0 durch 1 bis ∞ wächst, selbst

von 2 durch $\sqrt{(4\sin^2\theta)}$ bis Null abnimmt.

Aus dieser Bemerkung folgt, dafs in den drei verschiedenen Fällen die Seiten rechts der Gleichungen (18.) die Einheit nicht übertreffen.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dafs die so gefundenen Werthe von u und v wirklich die Aufgabe auflösen. Zu diesem Zweck leite man aus den Gleichungen (16. und 17.) die folgenden ab:

$$\frac{2\varrho\sin\theta}{1-\varrho^2} = \frac{2\sin coam(u,k)\, tang\, am(v,k_1)}{\sin^2 coam(u,k)-tang^2 am(v,k_1)},$$

$$\frac{2k\varrho\sin\theta}{1-k^2\varrho^2} = \frac{2k\sin coam(u,k)\, tang\, am(v,k_1)}{1-k^2\sin^2 coam(u,k)\, tang^2 am(v,k_1)},$$

welche nach Einführung der elliptischen Functionen des Arguments iv für den Modul k, in folgende übergehn:

$$\frac{2i\varrho\sin\theta}{1-\varrho^2} = \frac{2\sin\operatorname{coam}(u,k)\sin\operatorname{am}(iv,k)}{\sin^2\operatorname{coam}(u,k)+\sin^2\operatorname{am}(iv,k)},$$

$$\frac{2ik\varrho\sin\theta}{1-k^2\varrho^2} = \frac{2k\sin\operatorname{coam}(u,k)\sin\operatorname{am}(iv,k)}{1+k^2\sin^2\operatorname{coam}(u,k)\sin^2\operatorname{am}(iv,k)}$$

Zieht man beide Seiten dieser Gleichungen von ± 1 ab, und benutzt die Formeln (17. und 19. §. 18.) der „*Fundamenta*", so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{(1+\varrho(\cos\theta+i\sin\theta))(1-\varrho(\cos\theta-i\sin\theta))}{(1-\varrho(\cos\theta+i\sin\theta))(1+\varrho(\cos\theta-i\sin\theta))}$$
$$= \frac{(1+\sin\operatorname{am}(u+iv,k))(1-\sin\operatorname{am}(u-iv,k))}{(1-\sin\operatorname{am}(u+iv,k))(1+\sin\operatorname{am}(u-iv,k))}.$$
$$\frac{(1+k\varrho(\cos\theta+i\sin\theta))(1-k\varrho(\cos\theta-i\sin\theta))}{(1-k\varrho(\cos\theta+i\sin\theta))(1+k\varrho(\cos\theta-i\sin\theta))}$$
$$= \frac{(1+k\sin\operatorname{am}(u+iv,k))(1-k\sin\operatorname{am}(u-iv,k))}{(1-k\sin\operatorname{am}(u+iv,k))(1+k\sin\operatorname{am}(u-iv,k))},$$

aus welchen dann die beiden Formeln

$$2i\varrho\sin\theta = \sin\operatorname{am}(u+iv,k) - \sin\operatorname{am}(u-iv,k)$$
$$\varrho^2 = \sin\operatorname{am}(u+iv,k) \quad \sin\operatorname{am}(u-iv,k)$$

folgen, welche, da der imaginäre Theil von $\sin\operatorname{am}(u+iv,k)$, der Formel (15.) gemäfs, auch hier bei der gemachten Voraussetzung mit $i\theta$ übereinstimmt, auf die zu beweisende Gleichung

$$\varrho(\cos\theta+i\sin\theta) = \sin\operatorname{am}(u+iv,k)$$

führen. Die Argumente u und v selbst findet man aus den Werthen für $\sin\operatorname{coam}(u,k)$ und $\operatorname{tang}\operatorname{am}(v,k_1)$ durch die Formeln

$$u = K - \int_0^{\sin\operatorname{coam}(u,k)} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}},$$
$$v = \pm\int_0^{\sin\operatorname{am}(v,k_1)} \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k_1^2x^2))}}.$$

Die besondern Fälle, in welchen $\theta = 0$, oder $= \frac{1}{2}\pi$, oder $k = 0$ oder $k = 1$ ist, erfordern keine besondere Berücksichtigung. Auf eine ähnliche Art kann man jede gegebene Gröfse auch auf die Formen

$$\cos\operatorname{am}(u+iv,k)$$
$$\Delta\operatorname{am}(u+iv,k)$$
$$\operatorname{tang}\operatorname{am}(u+iv,k)$$

bringen.

Cranz, den 26. August 1852.

17.

Bemerkungen zur Theorie des Raumpendels.

(Von Herrn Prof. Dr. *Richelot* zu Königsberg in Pr.)

(Aus einem Briefe desselben an den Herausgeber dieses Journals.)

Ich glaube, Ew. . . . Interesse für die folgenden Mittheilungen aus dem Gebiete der *analytischen Mechanik* in Anspruch nehmen zu dürfen, um so mehr, da sie ein jetzt vielseitig besprochenes Problem berühren. Ich beziehe mich hiebei auf die im 2ten Bande der *analytischen Mechanik* Seite 194 eingeführte Bezeichnung, und werde hier zuerst *den* Theil der auf den folgenden Seiten gegebenen Entwickelungen, welcher sich auf *kleine* Schwingungen des Raumpendels bezieht, ganz anders behandeln, und namentlich die Modification derselben, in Folge störender Kräfte, durch einfache Formeln ausdrücken. Wenn gleich diese Aufgabe in neuester Zeit von mehrern Geometern bei Gelegenheit jenes oben erwähnten bekannten Problems behandelt ist, so halte ich doch die folgende Darstellung, ihres unmittelbaren Anschlusses an die *Lagrange*schen Gleichungen und ihrer Kürze wegen, nicht für überflüssig.

Die am angeführten Orte aufgestellten Differential-Gleichungen des Problems gehen nach einer leichten Combination in folgende über:

$$(1.)\quad \frac{d\left(\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = 0,\qquad \frac{d\left\{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\frac{2g}{r}\cos\psi\right\}}{dt} = 0,$$

wo also r die Länge des Pendels, ψ seine zur Zeit t stattfindende Neigung gegen die Verticale, und $d\varphi$ den Winkel bedeutet, den die durch das Pendel gelegte Vertical-Ebene in der Zeit dt beschreibt. Die Integration dieser Gleichungen führt auf die vier Gleichungen

$$\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt} = C,\qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\frac{2g}{r}\cos\psi = E,$$

$$t+T = \int_\beta^\psi\frac{\sin\psi\, d\psi}{R},\qquad \varphi+\Phi = \int_\beta^\psi\frac{C\,d\psi}{R.\sin\psi},$$

wo der Kürze wegen $R=\sqrt{\left\{\left(E+\frac{2g}{r}\cos\psi\right)\sin^2\psi-C^2\right\}}$ gesetzt ist. Die erste dieser Gleichungen entspricht dem Flächensatz, die zweite dem Satz der leben-

digen Kraft; die dritte giebt die Zeit, die vierte den Winkel φ an, welche von dem Moment an gezählt sind, wo der Winkel ψ seinen kleinsten Werth $=\beta$ hat, so dafs also $-T$ und $-\Phi$ die zu $\psi=\beta$ gehörigen Werthe von t und φ sind. Endlich bedeute α, wie bei *Lagrange*, den gröfsten Werth von ψ. Ich betrachte hier α, β, T, Φ als die vier willkürlichen Constanten der Integration und werde ihre Correctionen bei hinzutretenden störenden Kräften, hier in dem auch von *Lagrange* abgehandelten Falle, dafs α und β als Gröfsen erster Ordnung behandelt werden, auf folgende einfache Art bestimmen.

Da hier eine successive Annäherung Statt findet, so kann man, wie es gewöhnlich geschieht, die aus Berücksichtigung der höheren Potenzen von ψ herrührenden Glieder mit den auf der rechten Seite der Gleichungen (1.) hinzutretenden Störungsfunctionen vereinigen und erhält dann, die resultirenden Aggregate durch Ω und Ω_1 bezeichnend, folgende Differential-Gleichungen:

$$(2.)\quad \frac{d\left\{\psi^2\frac{d\varphi}{dt}\right\}}{dt}=\Omega,\qquad (3.)\quad \frac{d\left\{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\psi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{g}{r}\psi^2\right\}}{dt}=\Omega_1.$$

Es ist bekanntlich bei der Variation der Constanten vortheilhaft, solche Lösungen des ungestörten Problems anzuwenden, bei welchen alle übrigen Variabeln durch die Constanten und die Zeit ausgedrückt sind. In unserm Falle folgen dergleichen Formeln aus den allgemeinen Integralen hier von selbst, nemlich:

$$(4.)\quad \psi\sin(\varphi+\Phi)=\alpha\sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}}(t+T)\right),$$

$$(5.)\quad \psi\cos(\varphi+\Phi)=\beta\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}(t+T)\right),$$

aus denen man ersieht, dafs zu gleicher Zeit

$$t=-T+\tfrac{1}{2}(h\pi)\sqrt{\frac{r}{g}},\quad \varphi=-\Phi+\tfrac{1}{2}h\pi \text{ und } \psi=\alpha, \text{ oder } =\beta,$$

ist, je nachdem h eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, und dafs die ganze Bewegung periodisch ist. Ihre Richtigkeit ergiebt sich beiläufig aus folgender Rechnung, deren Resultate ich hier brauche. Durch Differentiation der Gleichungen (4. und 5.) erhält man:

$$(6.)\quad +\frac{d\psi}{dt}\sin(\varphi+\Phi)+\psi\frac{d\varphi}{dt}\cos(\varphi+\Phi)=\alpha\sqrt{\frac{g}{r}}\cos\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot(t+T),$$

$$(7.)\quad -\frac{d\psi}{dt}\cos(\varphi+\Phi)+\psi\frac{d\varphi}{dt}\sin(\varphi+\Phi)=\beta\sqrt{\frac{g}{r}}\sin\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot(t+T).$$

Multiplicirt man (6.) mit (5.) und (7.) mit (4.) und addirt die Resultate, so erhält man die Gleichung

$$(8.)\qquad \psi^2\frac{d\varphi}{dt} = \alpha\beta\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Erhebt man je beide Seiten der vier Gleichungen (4. 5. 6. 7.) ins Quadrat, nachdem man die beiden ersten mit $\sqrt{\frac{g}{r}}$ multiplicirt hat, und addirt die Resultate, so erhält man die Gleichung

$$(9.)\qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\psi^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{g}{r}\psi^2 = (\alpha^2+\beta^2)\frac{g}{r}.$$

Hieraus sieht man nicht nur, dafs (4. und 5.) die endlichen Integralgleichungen der Differentialgleichungen (2. und 3.) für $\Omega = 0$ und $\Omega_1 = 0$ sind, sondern zugleich, dafs, wenn man die Variabeln α und β, wie sie aus den Formeln (4. und. 5.) durch φ und ψ und t bestimmt werden, statt φ und ψ einführt, die Differentialgleichungen (2. und 3.) selbst in folgende übergehen:

$$(10.)\qquad \frac{d(\alpha\beta)}{dt} = \sqrt{\frac{r}{g}}.\Omega,\qquad \frac{d(\alpha^2+\beta^2)}{dt} = \frac{r}{g}.\Omega_1,$$

welche, nach Einführung der Gröfsen α, β, Φ, T, t statt der Variabeln ψ, φ, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, zur näherungsweisen Bestimmung der Gröfsen α und β geschickt sind. Die Differentiation der Formeln (4. und 5.) nach den erstern Gröfsen giebt die Gleichungen

$$\beta d\Phi - \alpha\sqrt{\frac{g}{r}}dT = +\,d\alpha.\text{tang}\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}(t+T)\right\},$$

$$\alpha d\Phi - \beta\sqrt{\frac{g}{r}}dT = -\,d\beta.\text{cotang}\left\{\sqrt{\frac{g}{r}}(t+T)\right\},$$

welche zur Bestimmung von Φ und T dienen. Setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{\frac{g}{r}}(t+T) = \tau,$$

$$\frac{r}{2g}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\Omega_1 - \frac{2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\Omega\right) = \omega\cos\tau,$$

$$\frac{r}{2g}\left(-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\Omega_1 + \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\Omega\right) = \omega_1\sin\tau$$

und bezeichnet die in der Zeit $t=t_0$ bis $t=t$ zu den vier Constanten des ungestörten Problems hinzutretenden Correctionen durch ein vor denselben gesetztes δ, so erhält man die vier einfachen Formeln:

$$\delta\alpha = \int \omega \cos\tau\, d\tau, \qquad \delta\beta = \int \omega_1 \sin\tau\, d\tau,$$

$$\delta\Phi = \int \frac{\alpha\omega_1 \cos\tau - \beta\omega \sin\tau}{\alpha^2 - \beta^2} d\tau, \qquad \delta T = \int \frac{\beta\omega_1 \cos\tau - \alpha\omega \sin\tau}{\alpha^2 - \beta^2} d\tau,$$

in welchen unter dem Integralzeichen die Gröfsen α, β, Φ, T als constant zu betrachten, und die Integrationen von $\tau = \sqrt{\frac{g}{r}}\cdot(t_0 + T)$ bis $\tau = \sqrt{\frac{g}{r}}\cdot(t + T)$ auszudehnen sind. Für die Zeit von einem Maximum des Winkels ψ bis zum nächsten, hat man die Integration von $h\pi$ bis $(h+1)\pi$ auszuführen, und daher die um π periodischen Glieder nicht zu berücksichtigen.

Als Beispiel werde ich die, Seite 206 der „Analytischen Mechanik" gegebene Aufgabe der Bewegung des Raumpendels im widerstehenden Mittel, jedoch hier nur für kleine Schwingungen, aber bei dem allgemeinern Gesetze des Widerstands behandeln, welches durch die Formel $av + bv^2$, wo v die Bahngeschwindigkeit bedeutet, ausgedrückt wird. Es ist dann,

$$v = \alpha\sqrt{(rg)}\cdot\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\sin^2\tau\right)} = \alpha\sqrt{(rg)}.\Delta\tau$$

gesetzt:

$$\Omega = -\alpha\beta\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot(a + b\alpha\sqrt{(rg)}.\Delta\tau),$$

$$\Omega_1 = -2\frac{g}{r}\cdot(\alpha^2\cos^2\tau + \beta^2\sin^2\tau)(a + b\alpha\sqrt{(rg)}.\Delta\tau),$$

und hieraus

$$\omega = -\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\alpha a \cos\tau - rb\alpha^2 \Delta\tau \cos\tau,$$

$$\omega_1 = -\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\beta a \sin\tau - rb\alpha\beta\Delta\tau \cos\tau,$$

woraus $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2} = k^2$, $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = k_1^2$ und mit der gewöhnlichen Bezeichnung der elliptischen Integrale,

$$\delta\alpha = -\tfrac{1}{2}a\alpha\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\{\tau + \tfrac{1}{2}\sin 2\tau\} - \tfrac{1}{3}b\alpha^2 r\left\{\sin\tau\cos\tau\,\Delta\tau + \frac{1+k^2}{k^2}E\tau - \frac{k_1^2}{k^2}F\tau\right\},$$

$$\delta\beta = -\tfrac{1}{2}a\beta\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\{\tau - \tfrac{1}{2}\sin 2\tau\} + \tfrac{1}{3}b\alpha\beta r\left\{\sin\tau\cos\tau\,\Delta\tau + \frac{k_1^2-k^2}{k^2}E\tau - \frac{k_1^2}{k^2}F\tau\right\},$$

$$\delta\Phi = 0 \text{ und } \delta T = -a\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\sin^2\tau + \tfrac{1}{3}b\alpha r\frac{\Delta^2\tau - 1}{k^2},$$

als die vom ersten Minimum des Winkels ψ an berechneten Correctionen folgen, welche, zwischen zwei auf einander folgenden Maximis,

$$\delta\alpha = -\tfrac{1}{2}a\alpha\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\pi - \tfrac{2}{3}b\alpha^2 r\left(\frac{1+k^2}{k^2}E - \frac{k_1^2}{k^2}K\right),$$

$$\delta\beta = -\tfrac{1}{2}a\beta\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\pi + \tfrac{2}{3}b\alpha\beta r\left(\frac{k_1^2-k^2}{k^2}E - \frac{k_1^2}{k^2}K\right),$$

$$\delta\Phi = 0, \quad \delta T' = 0 \text{ sind.}$$

Ich will diese Gelegenheit nicht vorbeilassen, um über die Behandlung desselben Problems für endliche Schwingungen, ohne successives Näherungsverfahren, einige nöthige Bemerkungen hinzuzufügen.

Bei vielen Problemen der Dynamik gewährt die Einführung der von *Jacobi* durchforschten elliptischen Functionen das *einzige* Mittel, um die Variabeln als Functionen der Zeit und der willkürlichen Constanten darzustellen und dadurch den Lösungen eine bisher nicht geahndete elegante Form zu geben, welche, wie oben schon erwähnt, bei hinzutretenden störenden Kräften zugleich die geeigneteste für die Variation der Constanten ist. Besonders einfach wird dann noch die Anwendung der letztern Methode, wenn man gewisse Systeme von willkürlichen Constanten zum Grunde legt, wie sie sich aus der Benutzung der *Hamilton*schen Methode der Integration der dynamischen Differentialgleichungen von selbst ergeben. Ich habe mich darüber ausführlicher bei einem dieser Probleme, dem sehr wichtigen Problem der Rotation eines festen Körpers, bei anderer Gelegenheit ausgelassen. Für das vorliegende ungestörte Problem hat vor längerer Zeit ein jüngerer Mathematiker, *Durege*, auf meine Veranlassung, dasselbe mit Hülfe der elliptischen Integrale und Functionen behandelt; aber weder diese, bis jetzt ungedruckte schöne Abhandlung, noch die später im 38ten Bande Ihres Journals erschienene, sonst sehr vollständige Arbeit des leider vor Kurzem uns durch den Tod entrissenen *Gudermann*, enthalten jene letzten, oben angedeuteten Formeln, welche z. B. in dem Problem *„der Rotation ohne äufsere Kräfte"* *Rueb* zuerst *zum Theil*, und später *Jacobi* im 39ten Bande Ihres Journals *vollständig* gegeben hat. Inzwischen habe ich bei mehrern Problemen, namentlich beim vorliegenden und beim Problem des sogenannten *Lagrange*schen Falles der Rotation eines schweren Revolutionskörpers, der um einen Punct einer seiner Haupt-Axenrichtungen pendelt, ähnliche Formen der Lösung erkannt. Die erstern habe ich Anfangs dieses Jahres meinem Freunde *Aronhold* brieflich mitgetheilt und lasse sie hier folgen, obgleich man im Märzhefte des *Liouville*schen Journals, in einer später erschienenen Abhandlung von *Tissot,* eine im Wesentlichen nicht davon verschiedene Auflösung finden kann.

Setzt man bei den obigen Bezeichnungen von *Lagrange:*

$$k^2 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}, \quad k_1^2 = \frac{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta},$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{g}{2rk^2}(\cos\beta - \cos\alpha)\right)},$$

führt die Argumente a und b durch die Gleichungen

$$\sqrt{\left(\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{1-\cos\beta}\right)} = -ik\sin\operatorname{am}(ia,k), \quad \sqrt{\left(\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{1+\cos\beta}\right)} = k\sin\operatorname{coam}(ib,k)$$

ein, und setzt endlich, mit Einführung der in den „*Fundamentis*" üblichen Zeichen,

$$u = m(t+T),$$

$$\bar{\Phi} = \Phi - i\left(\frac{H^1(ia)}{H(ia)} + \frac{H^1(ib+K)}{H(ib+K)}\right)u,$$

so sind jene Formeln folgende:

$$\cos\psi = \frac{\Theta_0^2}{\Theta^2(ia).H^2(ib+K) - H^2(ia)\Theta^2(ib+K)}$$

$$\times\left\{H^2(ib+K)\frac{\Theta(u+ia)\Theta(u-ia)}{\Theta^2 u} + H^2 ia\frac{\Theta(u+K+ib)\Theta(u+K-ib)}{\Theta^2 u}\right\},$$

$$\sin\psi\sin\varphi = \frac{\Theta_0^2.H(ia)H(ib+K)}{\Theta^2(ia)H^2(ib+K) - H^2(ia)\Theta^2(ib+K)}$$

$$\times\left\{e^{i\bar{\Phi}}\frac{\Theta(u-ia)\Theta(u+K-ib)}{\Theta^2 u} - e^{-i\bar{\Phi}}\frac{\Theta(u+ia)\Theta(u+K+ib)}{\Theta^2 u}\right\},$$

$$\sin\psi\cos\varphi = -i\frac{\Theta_0^2.H(ia)H(ib+K)}{\Theta^2(ia)H^2(ib+K) - H^2(ia)\Theta^2(ib+K)}$$

$$\times\left\{e^{i\bar{\Phi}}\frac{\Theta(u-ia)\Theta(u+K-ib)}{\Theta^2 u} + e^{-i\bar{\Phi}}\frac{\Theta(u+ia)\Theta(u+K+ib)}{\Theta^2 u}\right\}.$$

Zur vollständigen, hiermit zusammenhängenden Auflösung des durch eine besondere störende Kraft afficirten Problems, welches seit einiger Zeit das Interesse der Mathematiker sehr in Anspruch genommen hat, habe ich einen meiner frühern Schüler veranlafst, und bin um so mehr davon überzeugt, dafs seine Arbeit eine vortrefflich durchgeführte neue Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen, und namentlich der Transcendente Θ, auf die Theorie der Störungen sein wird, als derselbe die ihm von mir gestellte, oben angedeutete, einen Revolutionskörper betreffende Aufgabe in einer nächstens erscheinenden Abhandlung auf eine in jeder Beziehung befriedigende Weise behandelt hat. Genehmigen etc. etc.

Königsberg, den 7. September 1852.

18.

Elementar-stereometrischer Beweis für die Anwendung der allgemeinen Cubaturformel für Körperstumpfe auf solche Körper, die durch Rotation eines Kegelschnitts um eine Haupt-Axe entstehen.

(Vom Herrn Director Dr. *August* in Berlin.)

In einer Programmschrift, die im Jahre 1849 erschienen ist, habe ich den Satz bewiesen, dafs jeder ebenflächige Körper zwischen zwei parallelen Grundflächen, die alle seine Eckpuncte aufnehmen, raumgleich ist mit drei Pyramiden, die gleiche Höhe mit dem Körper haben und unter denen zwei den Mittelschnitt zur Grundfläche haben, eine aber das arithmetische Mittel der beiden parallelen Grundflächen. Nennt man daher die untere Grundfläche G, die obere K, den Mittelschnitt M, die Höhe (d. h. den Perpendikel-Abstand beider parallelen Grundflächen) h; so ist der Raum-Inhalt P des Körpers:

$$P = \tfrac{1}{6}h(4M+G+K).$$

Diesen Körpern, deren Seitenflächen beliebige Neigung gegen die Grundfläche haben können, habe ich im Allgemeinen den Namen *Trapezoïdalkörper* beigelegt; weil die Seitenflächen derselben vorwaltend Paralleltrapeze sind, obwohl auch Dreiecke und Parallelogramme vorkommen können. Da jeder ebenflächige Körper durch Parallel-Ebenen, welche durch die Eckpuncte desselben gelegt sind, in *Trapezoïdalkörper* zerlegt werden kann; so habe ich die letzteren auch als *Körperstumpfe* bezeichnet. Diese umfassen sowohl die abgestumpften *Pyramiden*, als auch die *Obelisken*, und enthalten auch solche Körper, deren Mittelschnitte Figuren von anderer Seitenzahl sind, als die Grundflächen; wie z. B. das Oktaëder, in welchem zwei parallele Seitenflächen als Grundflächen angesehen werden können, wobei der Mittelschnitt ein Sechseck wird, während die Grundflächen Dreiecke sind. Es können selbst beide Grundflächen oder eine (als Punct oder Linie) verschwinden; eben so die Mittelfläche. Die Formel ist daher ganz allgemein und reicht weiter, als die bekannte für Obelisken bereits aufgestellte.

Dafs diese Formel nicht neu ist, sondern für ebenflächige Körper schon von andern Mathematikern aufgestellt war (von *Chapman, Prony, Eytelwein, Poncelet, Brix, Steiner*), habe ich in jener Abhandlung angegeben. Die geometrische Ableitung derselben, verschieden von derjenigen, welche Herr Professor *Steiner* in diesem Journal (Band XXIII. S. 275) mitgetheilt hat, sowie der Nachweis, für welche Umdrehungskörper sie sich gleichfalls eigne, war der Haupt-Inhalt jenes Programms, in welchem ich auch die mir vom Herrn Commissionsrath *Brix* brieflich gewordene Mittheilung eines Resultates seiner Untersuchungen angeführt habe, auf welche ich auch gekommen war.

Es läfst sich nämlich durch Differenziren leicht nachweisen, dafs die Cubaturformel

$$P = \tfrac{1}{6}h(4M+G+K)$$

für alle Körper zwischen Parallel-Ebenen gültig ist, deren Durchschnittsflächen Functionen vom ersten, zweiten oder dritten Grade ihrer Entfernung von einer der Grundflächen sind.

Durch Anwendung des *Taylor*schen Satzes habe ich noch elementarer dies in jener Abhandlung darzustellen versucht. Erst in neuester Zeit bin ich zu einem elementar-stereometrischen Verfahren gelangt, durch welches jener Satz der Elementarmathematik ganz anheimfällt.

Obwohl dieses in dem dritten Cursus meines Lehrbuches der Geometrie behandelt werden wird, halte ich eine Verbreitung durch diese Blätter nicht für ganz überflüssig. Daher will ich des Zusammenhanges wegen kurz den Gang andeuten, den nach meiner Entwickelungsweise die Voruntersuchung nehmen mufs.

Vorausgesetzt wird die Lehre von den Prismen, der Satz, dafs die Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ist und die Euklidische Zerlegung der dreiseitigen Pyramide in zwei Pyramiden und zwei Prismen (*Euclid* Elem. XII, 3.).

Es ergiebt sich dann leicht folgendes:

1.

Eine dreiseitige Pyramide, zwischen zwei Parallel-Ebenen stehend gedacht, ist vier Pyramiden auf dem Mittelschnitt und einer Pyramide auf der Grundfläche zusammen gleich, welche sämmtlich die halbe Höhe der dreiseitigen Pyramide haben.

Legt man durch A (Taf. VII. Fig. 1.), der Spitze der dreiseitigen Pyramide $A-BCD$, eine Ebene parallel der Grundfläche BCD, so liegt die

Pyramide zwischen zwei Parallel-Ebenen, deren Abstand die Höhe des Körpers ist, und der Mittelschnitt halbirt alle drei Seiten.

Das stehende Prisma $EGFCKL$ und die obere Pyramide $A-EFG$ bilden zusammen 4 Pyramiden, deren jede gleich ist mit $AFGE$, also 4 Pyramiden, auf dem Mittelschnitt mit halber Höhe. Die Pyramide $GHDK$ und das liegende Prisma $EGKHBL$ sind aber einer Pyramide auf der Grundfläche BCD mit der halben Höhe des Körpers gleich. Dies führt auf die Ausmessungsformel

$$P = \tfrac{1}{6}h(4M+G),$$

wo P den Raum-Inhalt der Pyramide bedeutet und h, M, G die oben angegebenen Werthe haben.

2.

Eine dreiseitige Pyramide zwischen zwei Parallel-Ebenen so gedacht, dafs in jeder Ebene nur eine Kante derselben liegt, ist so grofs wie vier Pyramiden auf dem Mittelschnitt mit der halben Höhe des Körpers.

Die so eben betrachtete Pyramide $A-CBD$ kann auch so angesehen werden, dafs AC in einer Ebene liegt und BD in einer anderen, die mit derselben parallel liegt. Dann ist $EGKL$, der Mittelschnitt, ein Parallelogramm, mit dessen Ebene sowohl die Kante AC, als auch die Kante BD parallel sind. Der Abstand der Parallel-Ebenen mit $EGKL$, welche durch AC und BD gelegt sind, ist dann die Höhe des Körpers. Es ist klar, dafs das Prisma $EFCLKG$ drei Pyramiden $AFGE$ gleich ist. Es ist aber auch dreimal so grofs, als eine Pyramide auf der halben Grundfläche $EGKL$ mit der halben Höhe des Körpers. Daher bilden das Prisma $EFGKCL$ und die Pyramide $AFGE$ einen Raum, der vier Pyramiden auf dem halben Mittelschnitt mit der halben Höhe des Körpers, oder zweien Pyramiden auf dem ganzen Mittelschnitt mit der halben Höhe des Körpers gleich ist. Das Prisma $EGKHB$ und die Pyramide $GKDH$ haben dieselbe Gröfse. Die Pyramide ist also, so betrachtet, viermal so grofs, als eine Pyramide auf dem Mittelschnitt mit halber Höhe oder:

$$P = \tfrac{1}{6}h(4M).$$

3.

Wenn nun ein Körper, von ebenen Flächen eingeschlossen, sämmtliche Eckpuncte in zwei Parallel-Ebenen hat, so läfst er sich offenbar in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen. Davon haben einige ihre Grundflächen in der untern Parallel-Ebene (diese mögen *stehende* Pyramiden heifsen), andere ha-

ben ihre Grundflächen in der obern Parallel-Ebene (diese mögen *hangende* Pyramiden heifsen), alle übrigen haben nur Kanten in der obern und untern Grundfläche (diese mögen *schwebende* genannt werden). Die untere Grundfläche des so bestimmten Körperstumpfes besteht aus allen Grundflächen der stehenden Pyramiden, die obere Grundfläche des Stumpfes ist aus allen Grundflächen der hangenden zusammengesetzt und der Mittelschnitt schliefst alle Mittelschnitte der stehenden, hangenden und schwebenden Pyramiden ein.

Sind also in einem Trapezoïdalkörper p, p', p'', p''', p'''' etc. die stehenden dreiseitigen Pyramiden mit den Grundflächen g, g', g'', g''', g'''' etc. und mit den Mittelschnitten m, m', m'', m''', m'''' etc.:

Ferner P, P', P'', P''', P'''' etc. die hangenden Pyramiden mit den Grundflächen k, k', k'', k''', k'''' etc. und den Mittelschnitten n, n', n'', n''', n'''' etc.:

Endlich S, S', S'', S''', S'''' etc. die schwebenden Pyramiden mit den Mittelschnitten $\mu, \mu', \mu'', \mu''', \mu''''$ etc.: so ist

$$\begin{array}{lll} p = \frac{1}{6}h(4m + g), & P = \frac{1}{6}h(4n + k), & S = \frac{1}{6}h4\mu, \\ p' = \frac{1}{6}h(4m' + g'), & P' = \frac{1}{6}h(4n' + k'), & S' = \frac{1}{6}h4\mu', \\ p'' = \frac{1}{6}h(4m'' + g''), & P'' = \frac{1}{6}h(4n'' + k''), & S'' = \frac{1}{6}h4\mu'', \\ p''' = \frac{1}{6}h(4m''' + g'''), & P''' = \frac{1}{6}h(4n''' + k'''), & S''' = \frac{1}{6}h4\mu''', \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Die Addition dieser Gröfsen giebt für den Inhalt des Stumpfes:

$$\tfrac{1}{6}[4(m + m' + m'' + m''' + \cdots + n + n' + n'' + n''' + \cdots + \mu + \mu' + \mu'' + \mu''' + \cdots \\ + g + g' + g'' + g''' + \cdots + k + k' + k'' + k''' + \cdots],$$

d. i.

$$\tfrac{1}{6}h(4M + G + K).$$

Dafs diese umfassende Formel die bekannteren für Obelisken u. s. w. einschliefst, dafs sie zum Beweise des Cavallerischen Satzes dienen kann und durch diesen auch ihre Anwendung auf Körper mit windschiefen Flächen vermittelt wird, fällt in die Augen. In jener Abhandlung und in dem Lehrbuche habe ich das Hierhergehörige mitgetheilt. Dafs sie aber auch auf Kegelstumpfe und Stumpfe von Rotationskörpern der Kegelschnitte Anwendung findet, ergiebt sich folgendermafsen sehr leicht mittels des Cavallerischen Satzes.

4.

Zwischen den Parallel-Ebenen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ (Fig. 2.) befinde sich eine schwebende dreiseitige Pyramide $ABMN$, deren Seiten-Ebenen über die Parallel-Ebenen hieraus erweitert sind (z. B. die Kante AM bis 0 etc.).

Zwischen denselben Parallel-Ebenen befinde sich ein Ellipsoïd (oder Sphäroïd, oder eine Kugel), dessen Haupt-Axe SU das Perpendikel zwischen beiden Ebenen ist. Diese sei halbirt in T und ein Mittelschnitt sei durch beide Figuren gelegt. Dieser bildet in dem runden Körper einen Kreis mit dem Radius TV, in der schwebenden Pyramide das Parallelogramm $CDEF$. Das Verhältnifs des Kreises zum Parallelogramm sei $m:n$; so läfst sich zeigen, dafs überall jeder parellele Durchschnitt in beiden Körpern Figuren enthält, die das Verhältnifs $m:n$ haben.

Es werde durch den Punct W der Axe SU ein Parallelschnitt gelegt, der einen Kreis mit dem Radius WX in dem runden Körper und das Parallelogramm $GHKL$ in der schwebenden Pyramide begrenzt, so verhält sich, den Eigenschaften der Curve $SVXU$ entsprechend (mag diese nun ein Halbkreis oder eine halbe Ellipse zur grofsen oder kleinen Axe SU sein):

$$WX^2 : TV^2 = TU^2 - TW^2 : TU^2.$$

Die Parallelogramme $CDEF$ und $GHKL$ sind aber gleichwinklig, weil $CD \ddagger GH$ und $CF \ddagger GL$ ist. Daher verhält sich:

$$GHKL : CDEF = GH.GL : CD.CF.$$

Es ist aber

$$GH : CD = AG : AC = SW : ST = TU + TW : TU,$$
$$GL : CF = GM : CM = WU : TU = TU - TW : TU,$$

also $$GHKL : CDEF = TU^2 - TW^2 : TU^2,$$

daher $$GHKL : CDEF = WX^2\pi : TV^2\pi.$$

Es haben demnach überall die Durchschnitte des runden Körpers zu den Durchschnitten der schwebenden Pyramide das Verhältnifs $m:n$. Daher haben, nach dem Cavallerischen Satze (der auch in diesem Falle durch die bekannte Methode des Ein- und Umbaues von Prismen ersetzt werden kann) nicht nur die ganzen Körper, sondern auch jede zwei zwischen denselben Parallel-Ebenen liegenden Stumpfe das Verhältnifs $m:n$. Jeder solcher Stumpf ist aber als Trapezoïdalkörper nach der aufgestellten Formel zu berechnen, also auch jeder Stumpf des runden Körpers. Wären G, K, M, h die Bestimmungsgröfsen des Trapezoïdalkörpers P und G', K', M', h die des runden Stumpfes P'; so wäre

$$G' = \frac{m}{n}G, \quad K' = \frac{m}{n}K, \quad M' = \frac{m}{n}M, \quad P' = \frac{m}{n}P.$$

Es ist nach der Formel:

$$P = \tfrac{1}{6}h(4M+G+K),$$

also

$$P' = \tfrac{1}{6}h\frac{m}{n}(4M+G+K) = \tfrac{1}{6}h(4M'+G'+K').$$

5.

Stellt man sich die Verlängerung von SU, als Axe eines Hyperboloïds vor, dessen Erzeugungscurve UZ zur Haupt-Axe US und zur Quer-Axe TV hat, und legt durch diesen runden Körper und durch den Trapezoïdalkörper, der von den erweiterten Seiten-Ebenen der schwebenden Pyramide eingeschlossen wird, eine Ebene parallel mit $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$, die in dem runden Körper den Kreis mit dem Radius YZ und in dem Trapezoïdalkörper das Parallelogramm $PQRO$ bildet; so verhält sich auch hier der Kreis zum Parallelogramm wie $m:n$.

Nach den Gesetzen der Hyperbel ist nämlich

$$ZY^2 : TV^2 = TY^2 - TU^2 : TU^2.$$

Es ist aber auch das Parallelogramm $OPQR$ gleichwinklig mit $CDEF$, weil $CD \ddagger FE \ddagger RQ$ und $CF \ddagger OR$ ist. Daher ist

$$RQPO : CDEF = RQ.RO : CF.CD = RQ.RO : FE.FC,$$
$$RQ : FE = BR : FB = YS : TS = TY + TU : TU,$$
$$RO : CF = RM : MF = YU : UT = TY - TU : TU.$$

Also auch

$$ROPQ : FCDC = TY^2 - TU^2 : TU^2 = YZ^2\pi : TV^2\pi.$$

Das Übrige ergiebt sich wie vorhin und es ist ersichtlich, dafs auch ein Hyperboloïd nach dieser Formel gemessen werden kann.

6.

Die Anwendbarkeit der Formel auf Paraboloïde zu zeigen, dient folgende Construction.

Sei (Fig. 3.) ein Paraboloïd mit der Axe AB zwischen den Parallel-Ebenen $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ aufgestellt und neben demselben ein beliebiges liegendes dreiseitiges Prisma, dessen eine Parallelkante CD mit dem Scheitel des Paraboloïds A in der Ebene $\alpha\beta$ liegt und dessen andere beide Parallelkanten EF, GH in der Ebene $\gamma\delta$ liegen, in welcher sich, als Durchschnitt des runden Körpers, der Kreis mit dem Radius BK befindet. Dieser Kreis habe zum Parallelogramm $EFHK$ das Verhältnifs $m:n$; dann hat jeder Durchschnitt des Paraboloïds zum

Durchschnitt des Prisma in derselben Parallel-Ebene zu $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ dasselbe Verhältnifs $m:n$.

Es sei eine Parallel-Ebene gelegt, welche die Axe des Paraboloïds in L schneidet und mit derselben einen Kreisdurchschnitt bildet, der den Radius LM hat, in dem Prisma aber das Parallelogramm $NOPQ$ begrenzt, so ist auch

$$LM^2\pi : NOPQ = m:n.$$

Nach dem Gesetz der Parabel ist

$$KB^2 : LM^2 = AB : AL.$$

Es ist aber auch das Parallelogramm $EGHF$ gleichwinklig mit $NOPQ$, also

$$EGHF : NOPQ = EG.GH : NO.OP = EG : NO$$
$$= EC : NC = BA : AL.$$

Daher ist auch

$$EGHF : NOPQ = KB^2\pi : LM^2.$$

Alles übrige ergiebt sich wie vorhin, und man sieht, dafs alle Parallelschnitte des Paraboloïds auch jenseit der Ebene $\gamma\delta$, zu den Schnitten zwischen den erweiterten Flächen des Prismas überall das Verhältnifs $m:n$ haben.

Es läfst sich daher auch jeder Paraboloïdstumpf nach dieser Regel ausmessen.

Somit zeigt sich die Form

$$P = \tfrac{1}{6}h(4M + G + K)$$

als über das ganze Gebiet der Elementarstereometrie sich ausdehnend, und ist auch innerhalb dieses Gebietes zu erweisen.

Dieses Umstandes wegen und wegen der in der Beweisführung enthaltenen Proportionalität (in gewissen Fällen auch Gleichheit) runder und ebenflächiger Körper, glaube ich, dafs diese Mittheilung den Liebhabern der Mathematik nicht überflüssig scheinen wird. *)

Berlin im November 1852.

---

*) In dem erwähnten Lehrbuche ist auch die Anwendung der Formel auf Rotationskörper einer Hyperbel um die Quer-Axe derselben bewiesen. Errichtet man nämlich zwischen den Ebenen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$, aufser dem runden Körper, ein Prisma und eine Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe neben einander; so hat die *Summe ihrer Durchschnitte* zum Durchschnitt des runden Körpers in jeder Parallel-Ebene dasselbe Verhältnifs.

19.

Einige Andeutungen über ein neues Coordinatensystem und Anwendung desselben auf die Aufgabe: „In einen gegebenen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen drei Seiten durch drei gegebene Puncte gehen."

(Vom Herrn *Aubertin*, Notar zu Mülheim bei Cöln a. R.)

1.

Wenn die Axen, auf welche sich die Gleichung der Kegelschnitte bezieht, so angenommen werden, dafs die erste Axe mit den beiden *Tangenten* der Curve in den beiden Durchschnittspuncten der zweiten Axe mit der Curve parallel ist, so ist die Gleichung des Kegelschnitts:

$$1-(r+s)y+rsy^2+cx^2 = 0.$$

In dieser Gleichung sind r und s die reciproken Werthe der Ordinaten der Durchschnittspuncte der Curve mit der zweiten Axe, und c ist irgend eine Constante, deren Bedeutung sich mit Rücksicht auf eine gegebene Curve leicht nachweisen läfst.

Die obige Gleichung läfst sich auch wie folgt schreiben:

$$\frac{(1-ry)}{x}.\frac{(1-sy)}{x}+c = 0,$$

und hieraus erhält man, wenn zur Abkürzung

$$(1.) \quad \frac{1-ry}{x} = v \quad \text{und} \quad \frac{1-sy}{x} = w$$

gesetzt wird, der Axenbestimmung gemäfs:

$$(2.) \quad vw+c = 0$$

für die Gleichung der Kegelschnitte.

2.

Die vorhin eingeführten Gröfsen v und w eignen sich aber eben so wohl zur Bestimmung der Lage eines Puncts, wie die gewöhnlichen Coor-

dinaten x und y, aus welchen sie mittels der Gleichungen (1.) leicht abgeleitet werden können; so wie umgekehrt x und y aus v und w.

Die geometrische Bedeutung der neuen Coordinaten v und w ergiebt sich auf folgende Weise. Es sei a irgend ein Punct, dessen Coordinaten zu bestimmen sind und V und W (Taf. IX. Fig. 1.) seien zwei feste Puncte auf der Axe der Y, deren reciproke Ordinatenwerthe r und s sind. Zieht man dann von V und W zwei Gerade durch den Punct a, welche die Axe der X in v', w' schneiden, so sind des Puncts a Coordinaten $v = \frac{1}{Av'}$ und $w = \frac{1}{Aw'}$.

Jede Gleichung ersten *Grades* zwischen v und w stellt eine *gerade Linie* und jede Gleichung zweiten *Grades* einen *Kegelschnitt* vor, der aber, wie bei den gewöhnlichen Coordinaten, imaginär werden, oder auch in ein System zweier Geraden übergehen kann.

So stellen, um einige Beispiele anzuführen, von denen wir in der Folge Gebrauch machen werden, die Gleichungen

$$(3.)\qquad w - w' = 0 \quad \text{und} \quad v - v' = 0$$

zwei Gerade vor, welche durch W und beziehungsweise durch V gehen;

$$(4.)\qquad w - v = 0$$

ist die Axe der X und

$$(5.)\qquad \begin{cases} w + mv = n \\ \text{und } w + mv = n' \end{cases}$$

stellen zwei Geraden vor, welche sich in demselben Puncte der Axe der Y und für $m = 1$ in einem Puncte dieser Axe schneiden, welcher der vierte, dem A zugeordnete *harmonische Theilungspunct* zu A, V und W ist (Fig. 1.). Endlich sind

$$(6.)\qquad \begin{cases} w - w' + m(v - v') = 0 \\ \text{und } (v' - v'')w + (w'' - w')v + w'v'' - v'w'' = 0 \end{cases}$$

zwei Gerade, deren erste durch den Punct geht, dessen Coordinaten $v = v'$ und $w = w'$ sind, die zweite durch die beiden Puncte, deren Coordinaten

$$\begin{Bmatrix} v = v' \\ w = w' \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} v = v'' \\ w = w'' \end{Bmatrix} \text{ sind.}$$

Alles Dieses bedarf keines besondern Nachweises. Man sieht es unmittelbar, wenn man für v und w ihre Werthe aus den Gleichungen (1.) in x und y setzt; wo dann die Gleichung in der Form sich zeigt, in welcher man sie gewöhnlich betrachtet. Auch ließe es sich leicht aus der Natur der

gewöhnlichen Coordinaten ableiten. Die neuen Coordinaten scheinen aber für eine gewisse Art von Aufgaben, namentlich für solche, deren Construction sich *blofs mittels des Lineals* ausführen läfst, manchen Vorzug vor den gewöhnlichen zu haben; wenigstens habe ich gefunden, dafs die Schwierigkeiten, welche solche Aufgaben bei Zugrundelegung der alten Coordinaten verursachen, durch die neuen Coordinaten gröfstentheils verschwinden. Ich bin z. B., was mir durch Anwendung der alten Coordinaten nicht gelingen wollte, zu der Auflösung der von Herrn Professor *Steiner* irgendwo gestellten Aufgabe und ihrer analogen: „Die Durchschnittspuncte einer Geraden mit einem Kegelschnitte, von welchem blofs 5 Puncte gegeben sind, zu finden;" so wie zu den Beweisen der von demselben jüngst in diesem Journal mitgetheilten geometrischen Lehrsätze, wenigstens der meisten derselben und ihrer analogen, durch Anwendung der neuen Coordinaten, mit Leichtigkeit gelangt. Dadurch drängte sich mir die Vermuthung auf, und ich wage dieselbe hier auszusprechen: dafs man, wenn die rechten Kräfte sich dieser Methode bemeistern wollten, zu neuen Resultaten in der Geometrie gelangen würde; ähnlich denjenigen, um welche die Analytiker die Synthetiker der neuern Schule so oft zu beneiden Gelegenheit haben. Es wäre vielleicht ein Fortschritt, wenn die Analysis nicht nur der neuern Synthese folgen, sondern ihr voraneilen lehrte, und wenn so die Kunst der Synthese, in die analytische Form gebracht, zu gröfserm Gemeingute erhoben würde; wozu der Herr Professor *Plücker* in Bonn, in seinen analytischen Entwicklungen, so schätzbare Beiträge geliefert hat. Ich werde vielleicht in der Folge Gelegenheit finden, diese Methode in diesem Journal näher zu entwickeln, und dann zu zeigen, wie darin das Princip der *Reciprocität* eine neue Begründung findet. Für jetzt begnüge ich mich, sie auf die Auflösung der in der Überschrift angegebenen Aufgabe anzuwenden.

3.

WOVs (Fig. 2.) ist die gegebene Curve. Der leichtern Construction wegen ist ein Kreis gezeichnet; aber alles Folgende ist auch auf jeden Kegelschnitt anwendbar. a, b, c sind die drei gegebenen Puncte, durch welche drei Dreiecksseiten gehen sollen.

Man lege durch beliebige zwei der drei gegebenen Puncte, z. B. durch a und b, eine Gerade und nehme dieselbe zur Axe der X an, bestimme dann die zweite Axe AW, welche die erste in A schneidet, so, dafs sie den Bedingungen (§. 1.) genüge, setze die *reciproken* Werthe von AV und AW (V und W sind die Durchschnittspuncte der Curve mit der zweiten Axe)

beziehungsweise $= r$ und $= s$, so erhält man nach (§. 1.) für die Gleichung der Curve:

$$vw + c = 0 \quad (2.).$$

Nimmt man nun auf dem Kegelschnitte einen Punct λ an, dessen Coordinaten v' und w' sein mögen, zieht die beiden Geraden λa und λb, welche die Curve in r und s schneiden, nennt die Coordinaten der Puncte a und b, welche auf der Axe der X liegen, deren Gleichung $w - v = 0$ ist, $\mathfrak{w}$ und beziehungsweise $\mathfrak{w}'$, so erhält man für die Linien λa und λb die Gleichungen

$$w - w' + \frac{w' - \mathfrak{w}}{\mathfrak{w} - v'}(v - v') = 0$$

$$\text{und } w - w' + \frac{w' - \mathfrak{w}'}{\mathfrak{w}' - v'}(v - v') = 0,$$

und wenn zur Abkürzung

$$(7.) \quad \frac{w' - \mathfrak{w}}{\mathfrak{w} - v'} = m \quad \text{und} \quad \frac{w' - \mathfrak{w}'}{\mathfrak{w}' - v'} = m'$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$(8.) \quad w - w' + m(v - v') = 0 \quad \text{und} \quad w - w' + m'(v - v') = 0.$$

Es ließen sich nun durch Verbindung dieser Gleichungen mit der Gleichung der Curve (2.) direct die Durchschnittspuncte r und s der Linien (8.) mit der Curve, und darnach die Gerade rs bestimmen. Wir gelangen aber dazu auch auf folgende Weise.

4.

Für das System der beiden Geraden (8.) findet sich

$$\{w - w' + m(v - v')\}\{w - w' + m'(v - v')\} = 0,$$

oder, wenn man entwickelt, und erwägt, dafs der Punct (v', w') auf der Curve (2.) liegt und dafs folglich $v'w' + c = 0$ ist:

$$(9.) \quad w^2 + (m + m)vw - \left(2w' - \frac{(m+m')c}{w'}\right)w + mm'v'^2$$
$$- \left((m + m')w'^2 - \frac{2mm'c}{w'}\right)v + w'^2 - (m + m')c + \frac{mm'c^2}{w'^2} = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichung der Curve $vw + c = 0$ mit einem unbestimmten Coëfficienten μ und addirt das Product zu der Gleichung (9.), so ergiebt sich:

$$(10.) \quad w^2 + (m + m' + \mu)vw - \left(2w' - \frac{(m+m')c}{w'}\right)w + mm'v^2$$
$$- \left((m + m')w' - \frac{2mm'c}{w'}\right)v + w'^2 - (m + m' - \mu)c + \frac{mm'c^2}{w'^2} = 0.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen einen Kegelschnitt vor, der durch die Durchschnittspuncte des Liniensystems (9.) mit der Curve (2.) geht und weder mit dem Liniensysteme noch mit der Curve andere Puncte gemein hat; wie solches aus bekannten Grundsätzen folgt.

Bei gehöriger Bestimmnng von μ kann aber die Gleichung (10.) auch ein System *zweier Geraden* vorstellen, und zwar für $\mu=0$ das System der beiden Geraden (8.); wie es sich versteht. Wenn aber μ nicht $=0$ ist und man also das System der beiden Linien (8.) ausschliefst, kann durch (8.) kein anderes Liniensystem vorgestellt werden, als dasjenige, welches durch die Tangente im Puncte (v', w') und durch die Linie rs gebildet wird.

5.

Die Tangente in einem gegebenen Puncte (v', w') an der Curve, kann man auf die bekannte Weise bestimmen, indem man annimmt, dafs sie durch zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Puncte der Curve gehe, die bis zum Zusammenfallen sich nähern. Dann mufs man, wie bei den gewöhnlichen Coordinaten, um die Gleichung der Tangente zu bekommen, in der allgemeinen Gleichung der durch den Punct (v', w') gehenden Geraden, $w-w'+a(v-v')=0$, den Coëfficienten a dem negativen Werthe der *Ableitung* von w' und v' gleich setzen. Aus dem Differential von $w'v'+c=0$ erhält man $\frac{\partial w'}{\partial v'}=-\frac{w'}{v'}$, also ist $a=\frac{w'}{v'}$, und demnach ist die Gleichung der Tangente, wenn man erwägt, dafs $v'w'+c=0$ ist:

$$v'w+w'v+2c = 0.$$

Diese Gleichung läfst sich aber auch direct finden. Nämlich die Gleichungen der beiden Geraden, welche durch den Punct (v', w') und durch den Punct W einerseits und den Punct V anderseits gehen, sind:

$$w-w' = 0 \quad \text{und} \quad v-v' = 0.$$

Dies giebt durch Multiplication das System der beiden Linien

$$wv-v'w-w'v+w'v' = 0,$$

und wenn man hievon die Gleichung der Curve $vw+c=0$ abzieht, und berücksichtigt, dafs $w'v'+c=0$ ist, so erhält man für die Gleichung der Tangente im Puncte $(v'w')$, wie oben:

$$v'w+w'v+2c = 0.$$

6.

Es sei jetzt

$$w + av + b = 0$$

die Gleichung der Linie rs, so erhält man für das Liniensystem, welches noch unter Ausschliefsung der Linien (8.) durch die Gleichung (10.) vorgestellt werden kann:

$$(v'w + w'v + 2c)(w + av + b) = 0;$$

und wenn man diese Gleichung entwickelt und der Gleichung (10.) identisch gleichsetzt, zur Bestimmung von a und b:

$$a = -\frac{w'^2}{mm'c} \quad \text{und} \quad b = -\frac{(m+m')w'}{mm'}.$$

Demnach ist die Gleichung der Linie rs:

$$\frac{mm'v'v}{c(m+m')} + \frac{w'w}{c(m+m')} + 1 = 0,$$

und wenn man wieder für m und m' ihre Werthe aus den Gleichungen (7.) setzt:

$$(11.) \quad (c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}') - cv + \mathfrak{w}\mathfrak{w}'v)w' + (c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}') - cw + \mathfrak{w}\mathfrak{w}'v)v'$$
$$+ c\{(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')(v+w) - 2\mathfrak{w}\mathfrak{w}' + 0\} = 0.$$

In dieser Gleichung bedeuten v und w die laufenden Coordinaten; die besondere Form wurde aber mit Rücksicht auf das Folgende gewählt.

Soll die Gerade rs, wie es die Aufgabe erfordert, durch den Punct c gehen, dessen Coordinaten v'', w'' sein mögen, so mufs die Gleichung (11.) befriedigt werden, wenn man in derselben $v = v''$ und $w = w''$ setzt. Dann erfüllen aber auch die Coordinaten v', w' folgende Gleichung, welche man erhält, wenn man in der Gleichung (11.) $w' = w$ und $v' = v$, ferner $w = w''$ und $v = v''$ setzt, nämlich:

$$(12.) \quad (c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}') + \mathfrak{w}\mathfrak{w}'w'' - cv'')w + (c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}') + \mathfrak{w}\mathfrak{w}'v'' - cw'')v$$
$$+ c\{(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')(v''+w'') - 2\mathfrak{w}\mathfrak{w}' + 2c\} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs der Punct λ, dessen Coordinaten w' und v' genannt wurden und welcher die der Linie ab gegenüber liegende Spitze des gesuchten Dreiecks bildet, auf einer Geraden liegt, welche durch (12.) vorgestellt wird. Da nun der Punct λ auch auf der *Curve* liegt und demnach durch den Durchschnitt derselben mit der Geraden (12.) bestimmt wird, so erhält man im Allgemeinen für λ eine *doppelte* Bestimmung. Es giebt daher auch *zwei* Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, welche aber auch beide imaginär werden können, wenn die Linie (12.) die Curve nicht schneidet;

oder die in Eins zusammen fallen können, wenn die Linie (12.) eine Tangente an die Curve ist.

7.

Es bleibt jetzt nur noch die *Construction* der Linie (12.) übrig. Es mag dieselbe durch zwei Puncte, und zwar durch die Durchschnittspuncte mit den Axen der X und Y bestimmt werden; welche Durchschnittspuncte in (Fig. 2.) mit μ und ν bezeichnet sind.

Um den Punct μ, den Durchschnittspunct der Linie mit der Axe der X, zu finden, ist in der Gleichung (12.) $v = w$ zu setzen; was

$$(13.) \quad w = \frac{c(2ww'+2c-(w+w')(v''+w''))}{(ww'-c)(v''+w'')+2c(w+w')} \text{ giebt.}$$

Dieser Ausdruck ist ziemlich complicirt und scheint zu einer einfachen Construction wenig passend. Indessen ist zu bemerken, dafs in demselben die Gröfsen v'' und w'', aufser in der Summe $v''+w''$, nicht weiter vorkommen. Daraus folgt, dafs w unverändert bleibt, so lange $w''+v''$ denselben Werth behält, wie sich auch sonst der Werth der Gröfsen w'' und v'' ändern möge; das heifst geometrisch: so lange der Punct c auf der Geraden $w+v = w''+v''$ bleibt. Diese Gerade geht aber durch den Punct c, dessen Coordinaten v'' und w'' sind, und schneidet die Axe Y in dem vierten, A zugeordneten *harmonischen* Theilungspuncte zu A, V und W; wie Dies schon oben (in §. 2. Gleichungen 5.) angedeutet wurde; der Durchschnittspunct unserer Linie mit der Axe Y ist in (Fig. 2.) mit h bezeichnet.

Es sei jetzt β der Durchschnittspunct der Linie ch mit der Curve, und die Aufgabe sei: in die Curve ein Dreieck zu legen, dessen drei Seiten durch β, a und b gehen: so liegen, wie leicht zu sehen, die Spitzen der beiden möglichen Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, in den zweiten Durchschnittspuncten der Linien $b\beta$ und $a\beta$ mit der Curve, nemlich in den Puncten γ und δ (Fig 2.). Verbindet man nun γ und δ durch eine Gerade $\gamma\delta$, so schneidet diese die Axe X, wie nachgewiesen, in demselben Puncte, wie die durch die Gleichung (12.) dargestellte Gerade. Der Durchschnitt dieser Geraden mit der Axe X, oder der Punct μ, ist also gefunden.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Durchschnitt der Geraden (12.) mit der Axe Y, oder den Punct v zu finden.

Man ziehe Wa und Wb, welche die Curve in n und m schneiden, stelle sich die Linie Vm gezogen vor und setze für die Gleichung dieser Linie:

$$v = v'.$$

Dann geht die Linie mn durch die Durchschnittspuncte des Liniensystems Wa und Vm mit der Curve. Die Gleichungen dieser Linien sind $w-\mathfrak{w}=0$ und $v-\mathfrak{v}'=0$; für die Gleichung des Liniensystems erhält man also:

$$(w-\mathfrak{w})(v-\mathfrak{v}')=0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, zieht sie von der Gleichung der Curve $vw+c=0$ ab, und erwägt, dafs $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{w}'$ die Coordinaten des auf der Curve liegenden Punctes m sind, dafs also $\mathfrak{v}'\mathfrak{w}'+c=0$ ist, so erhält man

$$(14.)\qquad c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')+\mathfrak{w}\mathfrak{w}'v-cw=0,$$

für die Gleichung der Geraden mn.

Um die Durchschnittspuncte dieser Linie mit den Linien Vw'' und Vc zu finden, welche Durchschnittspuncte in (Fig. 2.) mit p und p' bezeichnet sind, mufs man in der Gleichnng (14.) erst $v=w''$ und dann $v=v''$ setzen. Nennt man die bezüglichen w der Puncte p und p', $(=b')$ und (b''), so erhält man aus der Gleichung (14.):

$$c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')+\mathfrak{w}\mathfrak{w}'w''=cb'$$
$$\text{und}\quad c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')+\mathfrak{w}\mathfrak{w}'v''=cb'',$$

woraus sich dann auch folgende Gleichungen ergeben:

$$c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')+\mathfrak{w}\mathfrak{w}'w''-cv''=c(b'-v'')$$
$$\text{und}\quad c(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')+\mathfrak{w}\mathfrak{w}'v''-cw''=c(b''-w'').$$

Setzt man für die Ausdrücke links in diesen Gleichungen ihre rechts stehenden Werthe in die Gleichung (12.), so erhält man, nach der Division mit $c(b'-v'')$:

$$w+\frac{b''-w''}{b'-v''}v+\frac{(\mathfrak{w}+\mathfrak{w}')(v''+w'')-2\mathfrak{w}\mathfrak{w}'+c}{b'-v''}=0.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade schneidet aber die Axe Y in demselben Puncte, wie die durch die Gleichung

$$w+\frac{b''-w''}{b'-v''}v+\frac{v''w''-b'b''}{b'-v''}=0$$

dargestellte Gerade, welche mit ihr den Coëfficienten von v gemein hat; wie dieses durch die Gleichung (5.) in (§. 2.) angedeutet wurde.

Die letztere Gleichung stellt aber eine Gerade vor, welche durch die zwei Puncte geht, deren Coordinaten $\left\{\begin{matrix} v=b' \\ w=w'' \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} v=v'' \\ w=b'' \end{matrix}\right\}$ sind. Der erstere dieser Puncte liegt im Durchschnitte der Linien Vb' und Ww'' und ist in der Figur durch ϱ bezeichnet; der zweite Punct ist der auf der Linie mn

liegende Punct p'; die Linie $\varrho p'$ giebt also in ihrem Durchschnittspuncte mit der Axe Y den Punct ν oder den Durchschnittspunct der Geraden (12.) mit der Axe Y.

Verbindet man nun die Puncte μ und ν durch eine Gerade, so ist es die Gerade (12.), und in ihren Durchschnittspuncten mit der Curve, $\varkappa$ und λ, liegen die beiden Spitzen der nur allein möglichen Dreiecke, welche die Aufgabe fordert.

Durch diese Entwickelungen ist also die Construction der Aufgabe (Fig. 2.) ausgeführt. Zu mehrerer Übersichtlichkeit wollen wir noch die in dem Vorhergehenden zerstreut enthaltene Erklärung der Figur 2. beifügen.

In (Fig. 2.) ist $WOVs$ die gegebene Curve, und a, b, c sind die drei gegebenen Puncte. Die beiden möglichen Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, sind $\varkappa ol$ und λrs. Der Zweck der Auflösung war die Bestimmung der Puncte $\varkappa$ und λ, und hiezu der Puncte μ und ν; woraus dann das Weitere von selbst folgt.

Zu dieser Bestimmung ist durch beliebige zwei der drei gegebenen Puncte, und zwar hier durch a und b, eine Gerade gelegt; V und W sind die beiden Berührungspuncte zweier mit der Geraden ab parallelen *Tangenten* an die Curve; h ist der vierte, dem A zugeordnete *harmonische* Theilungspunct zu V, W und A, von welchen drei Puncten letzterer im Durchschnitt der Linien VW und ab liegt.

Die Puncte β, m, n, γ und δ liegen auf der Curve und sind die beziehlichen Durchschnitte derselben mit den Geraden: $ck(\beta)$; $Wb(m)$; $Wa(n)$; $a\beta(\delta)$ und $b\beta(\gamma)$. Die Puncte μ und w'' auf der Geraden ab sind die beziehlichen Durchschnitte derselben mit den Geraden $\gamma\delta(\mu)$ und $Wc(w'')$. Die Puncte p und p' auf der Geraden mn sind die Durchschnittspuncte derselben mit den Geraden $Vw''(p)$ und $Vc(p')$. b', auf der Geraden ab, ist der Durchschnitt derselben mit der Geraden Wp. ϱ, auf der Linie $Wc(w'')$, ist der Durchschnitt derselben mit der Geraden Vb'; ν liegt im Durchschnitte der Linien VW und $\varrho p'$; $\varkappa$ und λ endlich liegen im Durchschnitte der Curve mit der Geraden $\mu\nu$, und da μ und ν vorhin bestimmt sind, so ist hiermit die Aufgabe gelöset.

Für die Aufgabe: „Um einen beliebigen, gegebenen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen drei Winkelspitzen auf drei gegebenen Geraden liegen," findet eine ganz ähnliche Auflösung Statt.

Mülheim am Rhein, am 16. October 1852.

20.

Mathematische Miszellen.

(Von Herrn Dr. *Schellbach*, Prof. der Math. zu Berlin.)

Das Folgende wird eine Sammlung mathematischer Gedanken und Beobachtungen enthalten, die sich mir während einer längern Reihe von Jahren bei meinen Vorträgen aufgedrängt haben. Sie ist hauptsächlich dazu bestimmt, anderen Lehrern der Mathematik bei ihren Vorlesungen denselben Nutzen zu gewähren, den sie mir gebracht hat.

No. I.

Über die Bewegung eines Puncts, der von einem festen Puncte angezogen wird.

Die Entfernung r des beweglichen Puncts P von dem festen Punct O, der zum Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten x und y genommen werden mag, bilde mit der Abscissen-Axe den Winkel φ. Der Zuwachs an Geschwindigkeit, welchen der Punct P während einer Secunde erfährt, wenn er sich in der Entfernung r von O befindet, sei eine Function R vom Radiusvector r. Die Bewegung des Puncts P wird dann durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{xR}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{yR}{r}.$$

Bezeichnet man die Differentiationen nach dem Bogen s der durchlaufenen Bahn durch Accente, setzt also $\frac{\partial x}{\partial s} = x'$, $\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = x''$ u. s. w., so lassen sich diese Gleichungen in die beiden:

$$(1.)\quad x't'' - t'x'' = \frac{xRt'^2}{r},$$

$$(2.)\quad y't'' - t'y'' = \frac{yRt'^2}{r},$$

verwandeln.

Nennt man ϱ den Krümmungshalbmesser der Bahn, so ist

$$(3.)\quad x'y'' - y'x'' = \frac{1}{\varrho},$$

und für

$$(4.)\qquad xy'-yx' = \Delta$$

wird

$$(5.)\qquad xy''-yx'' = \Delta'.$$

Eliminirt man erst t', dann t'' aus links (1. und 2.), so erhält man die beiden Gleichungen

$$(6.)\qquad \frac{t''}{\varrho} = \frac{\Delta' R t'^3}{r},$$

$$(7.)\qquad \frac{t'}{\varrho} = \frac{\Delta R t'^3}{r},$$

deren Quotient $\frac{t''}{t'} = \frac{\Delta'}{\Delta}$ giebt, von welcher Gleichung

$$t' = \alpha\Delta$$

das Integral ist, indem α die Integrationsconstante bezeichnet.

Man hat nun noch die Gleichungen

$$(8.)\qquad x^2+y^2=r^2;\quad xx'+yy'=rr';\quad x'^2+y'^2=1;\quad r'^2+r^2\varphi'^2=1$$

zu berücksichtigen. Die Summe der Quadrate der Gleichungen (4.) und $xx'+yy'=rr'$ giebt $r^2=r^2r'^2+\Delta^2$, woraus sich, mit Rücksicht auf die letzte der Gleichungen (8.) $\Delta=r^2\varphi'$, also

$$(9.)\qquad t' = \alpha r^2\varphi'$$

ergiebt. Setzt man nun den für t' gefundenen Werth in (7.), so erhält man

$$(10.)\qquad \frac{1}{\varrho} = \alpha^2 R r^5 \varphi'^3.$$

Werden $\frac{1}{r}$ durch u und die Differentiale nach dem Winkel φ durch Accente bezeichnet, so ist der einfachste Ausdruck für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve, der auch mit Nutzen in die Lehrbücher aufgenommen werden könnte:

$$(11.)\qquad \varrho = \frac{(us')^3}{u+u''}.$$

Da hier s' für $\frac{\partial s}{\partial \varphi}$ gesetzt worden ist und in (9.) φ' den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ bedeutet, so verwandelt sich durch diesen Werth von ϱ die Gleichung (10.) in

$$(12.)\qquad u''+u = \alpha^2 r^2 R;$$

welches die Differentialgleichung der Bahn des Puncts P ist.

Diese Gleichung läfst sich integriren, wenn z. B. R von der Form

$$R = \frac{a}{r^3} + \frac{\Phi}{r^3}$$

ist, wo a eine Constante und Φ eine Function des Winkels φ bedeutet. Man hat nämlich in diesem Falle nur die lineare Gleichung

$$(13.) \quad u'' + (1-\alpha^2 a)u = \alpha^2\Phi,$$

zu behandeln, deren Integral für $1-a\alpha^2 = \beta^2$ die Form

$$(14.) \quad u = \frac{1}{r} = \frac{\alpha^2}{\beta}\left\{\sin\beta\varphi\int\Phi\cos\beta\varphi\,\partial\varphi - \cos\beta\varphi\int\Phi\sin\beta\varphi\,\partial\varphi\right\} + \gamma\cos(\delta+\beta\varphi)$$

hat und bekanntlich für ein imaginäres β eine andere Gestalt annimmt. Die Constanten der Integration sind γ und δ. Verwandelt sich Φ blofs in eine Constante b, so erhält man aus (14.):

$$(15.) \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha^2 b}{\beta} + \gamma\cos(\delta+\beta\varphi),$$

welche Gleichung endlich für $a = 0$, also $\beta = 1$, in

$$(16.) \quad \frac{1}{r} = \alpha^2 b + \gamma\cos(\delta+\varphi)$$

übergeht und einen *Kegelschnitt* darstellt, dessen Brennpunct der feste anziehende Punct ist.

Jacobi hat in der Abhandlung: „De motu puncti singularis" im 24ten Bande dieses Journals dieselbe Aufgabe auf eine eigenthümliche und elegante Weise behandelt; aber er gelangt dort nur zu dem Satze, dafs das Problem auf Quadraturen gebracht werden kann, wenn R eine homogene Function zweiten Grades der Coordinaten x und y ist, oder wenn es, da $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ ist, die Form $\frac{\Phi}{r^3}$ hat. Bei seiner Behandlungsweise konnte sich die oben gefundene Verallgemeinerung des Satzes nicht ergeben.

Nimmt man an, es sei

$$R = \frac{a}{r^3} + br,$$

wo a und b Constanten bedeuten, so erhält man aus (12.):

$$(17.) \quad u^3u'' + (1-a\alpha^2)u^4 = b\alpha^2.$$

Von dieser Gleichung ist

$$(18.) \quad u^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{\beta}{1-a\alpha^2} + \frac{\sqrt{(\beta^2 - b\alpha^2(1-a\alpha^2))}}{1-a\alpha^2}\cos 2(\gamma + \varphi\sqrt{(1-a\alpha^2)})$$

das Integral, mit den Integrationsconstanten β und γ; welches bekanntlich, für $a\alpha^2 > 1$, eine andere Gestalt annimmt.

Ist die Constante $a=0$, so verwandelt sich die für den Punct P gefundene Bahn, wenn b positiv ist, in eine ***Ellipse***, deren Mittelpunct O einnimmt; denn man erhält dann aus (18.)

$$(19.)\quad \frac{1}{r^2} = \beta+\sqrt{(\beta^2-b\alpha^2)}\cos 2(\gamma+\varphi),$$

oder, wenn man $r\cos(\gamma+\varphi)=\xi$ und $r\sin(\gamma+\varphi)=\eta$ setzt:

$$(20.)\quad (\beta+\sqrt{(\beta^2-b\alpha^2)})\xi^2+(\beta-\sqrt{(\beta^2-b\alpha^2)})\eta^2 = 1.$$

Für die ***Zeit*** findet man durch Hülfe der Gleichung (9.): $t'=\alpha r^2\varphi'$, oder

$$\partial t = \alpha r^2\partial\varphi.$$

No. II.

In dieser Nummer werde ich dieselbe Aufgabe noch auf eine andere Weise behandeln, welche schneller als die gewöhnlichen Methoden zum Ziele führt.

Bezeichnet man das Differentiiren nach der Zeit t durch Accente, so ist z. B., wenn u und v Functionen von t sind:

$$(1.)\quad (uv)'' = \frac{(u^4v'^2)'}{2u^3v'}+u''v.$$

Die hier zu behandelnden Bewegungsgleichungen sind:

$$(x\cos\varphi)''+R\cos\varphi = 0 \quad\text{und}\quad (y\sin\varphi)''+R\sin\varphi = 0.$$

Mit Benutzung der Formel (1.) verwandeln sich diese Gleichungen unmittelbar in

$$(2.)\quad (r^4\sin^2\varphi.\varphi'^2)'-r^3(r''+R)\sin 2\varphi.\varphi' = 0,$$

$$(3.)\quad (r^4\cos^2\varphi.\varphi'^2)'+r^3(r''+R)\sin 2\varphi.\varphi' = 0.$$

Die Summe derselben giebt

$$(r^4\varphi'^2)' = 0,$$

also

$$(4.)\quad r^2\varphi' = c;$$

wo c die Constante der Integration ist.

Setzt man diese Constante in eine der Gleichungen (2.) oder (3.) statt $r^2\varphi'$, so findet sich

$$(5.)\quad r^3(r''+R)-c^2 = 0,$$

und hieraus

$$r' = \sqrt{\left(c'-2\int R\partial r-\frac{c^2}{r^2}\right)};$$

wo c' die zweite Integrationsconstante ist. Es ist also

$$(6.)\qquad t = \int \frac{\partial r}{\sqrt{\left(c' - 2\int R\partial r - \frac{c^2}{r^2}\right)}},$$

und mit Hülfe von (4.) findet man:

$$(7.)\qquad \varphi = c\int \frac{\partial r}{r^2\sqrt{\left(c' - 2\int R\partial r - \frac{c^2}{r^2}\right)}}.$$

No. III.

Um dasselbe Problem im Raume zu behandeln, hat man, wenn

$$x = r\cos\alpha;\quad y = r\cos\beta;\quad z = r\cos\gamma$$

gesetzt wird, folgende drei Gleichungen zu integriren:

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + R\cos\alpha = 0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R\cos\beta = 0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + R\cos\gamma = 0.$$

Stellen in (Fig. 1. Taf. VIII.) SX, SY, SZ die drei auf einander senkrechten Coordinaten-Axen vor, P den angezogenen Punct, und die übrigen krummen Linien Bogen gröfster Kreise, welche auf einer mit dem Radius SP construirten Kugel liegen: ferner PSA die Ebene der Bahn des Puncts P, und P_1 einen in dieser Ebene um 90° von P abstehenden Punct, so geben die sphärischen Dreiecke APX, APY, APB und die drei entsprechenden AP_1X, AP_1Y, AP_1B_1 die Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \cos\nu\cos\theta - \sin\nu\sin\theta\cos i, \\ \cos\beta = \cos\nu\sin\theta + \sin\nu\cos\theta\cos i, \\ \cos\gamma = \sin\nu\sin i, \end{cases}$$

$$(3.)\qquad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \sin\nu\cos\theta + \cos\nu\sin\theta\cos i, \\ \cos\beta_1 = \sin\nu\sin\theta - \cos\nu\cos\theta\cos i, \\ \cos\gamma_1 = -\cos\nu\sin i. \end{cases}$$

Aus der Summe der Quadrate der entsprechenden Gleichungen erhält man

$$(4.)\qquad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1 = 1 - \sin^2\theta\sin^2 i, \\ \cos^2\beta + \cos^2\beta_1 = 1 - \cos^2\theta\sin^2 i, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma_1 = \sin^2 i. \end{cases}$$

Diese 9 Gleichungen, in denen nur θ und i constant sind, geben

$$(5.)\qquad \partial\cos\alpha = -\cos\alpha_1\partial\nu;\quad \partial\cos\beta = -\cos\beta_1\partial\nu;\quad \partial\cos\gamma = -\cos\gamma_1\partial\nu,$$

$$(6.)\qquad \partial\cos^2\alpha = -\partial\cos^2\alpha_1;\quad \partial\cos^2\beta = -\partial\cos^2\beta_1;\quad \partial\cos^2\gamma = +\partial\cos^2\gamma_1.$$

Die Gleichungen (1.) verwandeln sich also durch die Transformation (1. N. II.) in

$$(7.)\quad\begin{cases}\partial\left(r^2\frac{\partial\cos\alpha}{\partial t}\right)^2+r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right)\partial.\cos^2\alpha = 0,\\ \partial\left(r^2\frac{\partial\cos\beta}{\partial t}\right)^2+r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right)\partial.\cos^2\beta = 0,\\ \partial\left(r^2\frac{\partial\cos\gamma}{\partial t}\right)^2+r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right)\partial.\cos^2\gamma = 0,\end{cases}$$

oder, wenn man (5. und 6.) benutzt, in

$$(8.)\quad\begin{cases}\partial\left(r^2\frac{\partial v}{\partial t}\cos\alpha_1\right)^2 = r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right)\partial.\cos^2\alpha_1,\\ \partial\left(r^2\frac{\partial v}{\partial t}\cos\beta_1\right)^2 = r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right)\partial.\cos^2\beta_1,\\ \partial\left(r^2\frac{\partial v}{\partial t}\cos\gamma_1\right)^2 = r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right)\partial.\cos^2\gamma_1.\end{cases}$$

Da $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1 = 1$ ist, so giebt die Addition dieser drei Gleichungen, ganz wie oben:

$$\partial\left(r^2\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = 0, \quad \text{also} \quad r^2\frac{\partial v}{\partial t} = c,$$

und durch Einführung dieses Werths in eine der Gleichungen (9.):

$$r^3\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}+R\right) = c^2.$$

No. IV.

Eine ähnliche Anwendung findet die Transformation (1.) in (II.) auch bei folgender Aufgabe, welche *Jacobi* ebenfalls in der oben erwähnten Abhandlung löset.

Es sei nämlich ein Punct A, in (Fig. 2.) gezwungen, sich auf einer Umdrehungsfläche zu bewegen, von welcher ZAB eine Meridiancurve ist. Die Kraft, welche ihn angreift, möge nur in der Meridian-Ebene wirken; ihre Componente AE, welche senkrecht gegen die Umdrehungs-Axe OZ gerichtet ist, sei X; die andere AF, parallel mit dieser Axe, heifse Y. Beide mögen Functionen der Entfernung AG oder $CO = x$ von der Axe OZ sein.

Die Coordinaten des Puncts A sind, wie es die Figur zeigt,

$$OD = \xi, \quad DC = \eta, \quad CA = y.$$

Die Richtung des Widerstandes λ, welchen die Fläche zu leisten hat, fällt ebenfalls ganz in die Meridian-Ebene. Stellt ∂s das Bogen-Element der Meridiancurve vor, so ist die senkrecht gegen die Axe gerichtete Componente

des Widerstandes $\lambda\frac{\partial y}{\partial s}$ und die mit ihr parallele $-\lambda\frac{\partial x}{\partial s}$. Es ist hier $\frac{\partial y}{\partial s}$ mit negativem Zeichen genommen, da vorausgesetzt wird, dafs der Bogen wächst, wenn y abnimmt. Bildet nun die Meridian-Ebene mit der festen Ebene ZOX den Winkel φ, so sind die Gleichungen der Bewegung offenbar folgende:

$$(1.)\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \left(X+\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right)\cos\varphi,$$

$$(2.)\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \left(X+\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right)\sin\varphi,$$

$$(3.)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y-\lambda\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Es ist aber

$$\xi = x\cos\varphi \quad\text{und}\quad \eta = x\sin\varphi;$$

daher giebt die Formel (1. in No. II.) statt (1. und 2.) die beiden Gleichungen

$$(4.)\quad \partial\left(x^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\varphi\right)^2+x^3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X-\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial.\cos^2\varphi = 0 \quad\text{und}$$

$$(5.)\quad \partial\left(x^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\varphi\right)^2+x^3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-Y-\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial.\sin^2\varphi = 0,$$

durch deren Addition man $\partial\left(x^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2=0$ und hieraus

$$(6.)\quad x^2\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c$$

erhält. Durch Einführung der Constanten c in eine der Gleichungen (4. oder 5.) ergiebt sich dann:

$$x^3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-X-\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right) = c^2.$$

Die beiden zur weiteren Lösung der Aufgabe erforderlichen Gleichungen sind also jetzt

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X+\frac{c^2}{x^3}+\lambda\frac{\partial y}{\partial s} \quad\text{und} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y-\lambda\frac{\partial x}{\partial s}. \end{cases}$$

Das Auftreten des Gliedes $\frac{c^2}{x^3}$ in der ersten dieser Gleichungen, welches hier ganz naturgemäfs sich zeigt, ist *Jacobi* so auffallend erschienen, dafs er darüber folgenden besonderen Satz aufstellt:

Propositio I.

„Punctum, quod in data superficie revolutione genita moveri debet, vi sollicitetur in plano Meridiani directa et a sola positione puncti in ipso Meridiano pendente: revocari potest motus propositus ad motum puncti in curva meridiana, accedente ad vim sollicitantem alia quae axi perpendicularis et cubo distantiae puncti ab axe inverse proportionalis est."

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (7.) mit ∂x, die zweite mit ∂y und addirt beide Producte, so erhält man

$$(8.) \qquad \frac{\partial x \partial^2 x + \partial\varphi \partial^2 y}{\partial t^2} = X\partial x + Y\partial y + \frac{c^2 \partial x}{x^3}.$$

Ist v die Geschwindigkeit des bewegten Puncts, also $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, und integrirt man (8.), nachdem mit 2 multiplicirt worden, so erhält man

$$(9.) \qquad \frac{\partial s^2}{\partial t^2} = v^2 = 2\int(X\partial x + Y\partial y) - \frac{c^2}{x^2},$$

wenn die zweite Constante nach der Integration hinzugefügt wird.

Wächst der Bogen mit der *Zeit*, so folgt hieraus

$$t = \int \frac{\frac{\partial s}{\partial x}\partial x}{\left\{2\int\left(X + Y\frac{\partial y}{\partial x}\right)\partial x - \frac{c^2}{x^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

und da $\partial\varphi = \frac{c\partial t}{x^2}$ ist, auch sogleich:

$$\varphi = c\int \frac{\frac{\partial s}{\partial x}\partial x}{x^2\left\{2\int\left(X + Y\frac{\partial y}{\partial x}\right)\partial x - \frac{c^2}{x^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus der Gleichung der Meridiancurve $f(x,y) = 0$ müssen die Werthe $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial s}{\partial x}$ genommen werden. Das Weitere über diese und ähnliche Aufgaben wird man bei *Jacobi* a. a. O. mit vielem Nutzen studiren.

V.

Über den Krümmungskreis.

Jeder Lehrer der Mathematik, der durch einen längeren Verkehr mit seinen Schülern Gelegenheit hat, die Wirkung seiner Vorträge zu sehen, und der zugleich auch den Einflufs anderer Docenten beurtheilen mag, weifs mit ziemlicher Sicherheit, dafs von den Studirenden kaum der dritte Theil selbst die einfacheren Vorstellungen, wie die vom Maafs der Krümmung der Curven, anfangs richtig auffafst, sondern erst nach längerer Arbeit und Anstrengung die Unklarheit seiner ersten Ansichten zu läutern vermag. Namentlich bei den Formeln, welche die Gröfse und Lage des Krümmungskreises bestimmen, bin ich häufig der Vorstellung begegnet, als ob diese Formeln auf eine gewisse allgemeine Weise von der Form der Function abhingen, durch welche die untersuchte Curve dargestellt wird. Ich bin daher veranlafst worden, diese Formeln für *endliche Differenzen* zu berechnen, und theile die Rechnung hier mit, weil sie zu denselben Ausdrücken führt, wie die sind, welche mit Hülfe der Differentialrechnung gewonnen werden.

Die Aufgabe ist also: den Radius ϱ und die Coordinaten ξ, η, ζ eines Kreises zu suchen, welcher durch drei Puncte geht, deren Coordinaten $x, y, z;$ $x_1, y_1, z_1;$ x_2, y_2, z_2 sind.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich, $x_1 - x$ durch $\varDelta x$ und $x_2 - x_1$ durch $\varDelta x_1$, so wie $\varDelta x_1 - \varDelta x$ durch $\varDelta^2 x$ etc., so ist, wenn x', y', z' die laufenden Coordinaten sind, die Gleichung der Ebene, welche durch die drei gegebenen Puncte geht:

$$(x'-x_1)(\varDelta y\varDelta^2 z-\varDelta z\varDelta^2 y)+(y'-y_1)(\varDelta z\varDelta^2 x-\varDelta x\varDelta^2 z)$$
$$+(z'-z_1)(\varDelta x\varDelta^2 y-\varDelta y\varDelta^2 x) = 0.$$

Setzt man

$$\xi - x_1 = u, \quad \eta - y_1 = v, \quad \zeta - z_1 = w,$$

so haben die vier Gröfsen u, v, w, ϱ offenbar folgenden vier Gleichungen zu entsprechen:

$$(1.)\quad u(\varDelta y\varDelta^2 z-\varDelta z\varDelta^2 y)+v(\varDelta z\varDelta^2 x-\varDelta x\varDelta^2 z)+w(\varDelta x\varDelta^2 y-\varDelta y\varDelta^2 x)=0,$$

$$(2.)\quad (u+\varDelta x)^2+(v+\varDelta y)^2+(w+\varDelta z)^2 = \varrho^2,$$

$$(3.)\quad u^2+v^2+w^2 = \varrho^2,$$

$$(4.)\quad (u-\varDelta x_1)^2+(v-\varDelta y_1)^2+(w-\varDelta z_1)^2 = \varrho^2.$$

Man nehme jetzt an, die Entfernung zwischen dem ersten und zweiten Puncte sei der zwischen dem zweiten und dritten gleich, so dafs also, wenn

man diese Entfernungen durch $\varDelta s$ und $\varDelta s_1$ bezeichnet,

$$(5.)\quad \varDelta x^2+\varDelta y^2+\varDelta z^2=\varDelta x_1^2+\varDelta y_1^2+\varDelta z_1^2=\varDelta s^2=\varDelta s_1^2$$

ist, oder, was dasselbe ist:

$$(6.)\quad 2(\varDelta x\varDelta^2x+\varDelta y\cdot\varDelta^2y+\varDelta z\varDelta^2z)+\varDelta^2x^2+\varDelta^2y^2+\varDelta^2z^2=0.$$

Zieht man von der Gleichung (2.) und dann von der Gleichung (4.), die (3.) ab, so bleibt

$$(7.)\quad 2(u\varDelta x+v\varDelta y+w\varDelta z)+\varDelta s^2=0,$$

$$(8.)\quad 2(u\varDelta x_1+v\varDelta y_1+w\varDelta z_1)-\varDelta s_1^2=0.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt

$$(9.)\quad u\varDelta^2x+v\varDelta^2y+w\varDelta^2z=\varDelta s^2.$$

Die Gleichung (1.) wird befriedigt, wenn man annimmt, es sei λ ein unbestimmter Coëfficient und

$$u=\lambda\varDelta^2x,\quad v=\lambda\varDelta^2y,\quad w=\lambda\varDelta^2z.$$

Setzt man aber diese Werthe für u, v, w in (7.) und benutzt (6.), so erhält man, ganz eben so wie wenn sie in (9.) gesetzt werden:

$$(10.\quad \lambda(\varDelta^2x^2+\varDelta^2y^2+\varDelta^2z^2)=\varDelta s^2.$$

Die Substitution derselben Werthe in (3.) giebt aber

$$(11.)\quad \lambda^2(\varDelta^2x^2+\varDelta^2y^2+\varDelta^2z^2)=\varrho^2,$$

also, wenn man (11.) durch (10.) dividirt,

$$\lambda=\frac{\varrho^2}{\varDelta s^2}.$$

Daher erhält man endlich

$$\xi-x_1=\varrho^2\frac{\varDelta^2x}{\varDelta s^2};\quad \eta-y_1=\varrho^2\frac{\varDelta^2y}{\varDelta s^2};\quad \zeta-z_1=\varrho^2\frac{\varDelta^2z}{\varDelta s^2}$$

und

$$\varrho=\pm\frac{\varDelta s^2}{\sqrt{(\varDelta^2x^2+\varDelta^2y^2+\varDelta^2z^2)}}.$$

Ich kann nicht verhehlen, dafs ich etwas überrascht war, die bekannten Formeln

$$\xi=x+\varrho^2\cdot\frac{\partial^2x}{\partial s^2};\quad \eta=y+\varrho^2\cdot\frac{\partial^2y}{\partial s^2};\quad \zeta=z+\varrho^2\cdot\frac{\partial^2z}{\partial s^2},$$

und

$$\varrho=\pm\frac{\partial s^2}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2)}}$$

für *endliche Differenzen* gültig zu finden.

VI.

Über den Krümmungshalbmesser.

(Fortsetzung.)

Schon in der ersten Nummer dieser Miszellen hatte ich Gelegenheit, eines Ausdrucks für den Krümmungshalbmesser zu gedenken, der öfters nützlich werden kann und den ich jetzt entwickeln will.

Der Radiusvector $OA = r$ der Curve EF bilde in (Fig. 3.) mit der Abscissen-Axe OX den Winkel φ. Auf die Tangente $AB = \tau$ des Puncts A ist das Loth $OB = p$ gefället, und dieselbe Construction ist für den auf A folgenden Punct A_1 wiederholt. Die Tangente τ bildet mit OX den Winkel ω, und daher schneidet sie auch den Krümmungshalbmesser $MA = \varrho$ des Puncts A, und den des Puncts A_1 unter dem Winkel $\partial\omega$. Steht AC senkrecht auf OA_1, so ist $AC = r\partial\varphi$, $CA_1 = \partial r$, und wenn das Bogen-Element AA_1 mit ∂s bezeichnet wird, so geben die ähnlichen Dreiecke AA_1C und AOB die Gleichung

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{r}{\tau}.$$

Es ist aber $\varrho = \frac{\partial s}{\partial \omega}$, oder wenn man für ∂s seinen Werth setzt:

$$\varrho = \frac{r\partial r}{\tau\partial\omega}.$$

Da nun der Winkel $BA_1B_1 = \omega_1 - \omega = \partial\omega$ ist, so wird

$$\tau\partial\omega = B_1D = p_1 - p = \partial p.$$

Der Inhalt des Dreiecks OAA_1 ist aber $\frac{1}{2}r^2\partial\varphi$ oder auch $\frac{1}{2}p\partial s$, daher ist

$$p = \frac{r^2\partial\varphi}{\partial s},$$

folglich

$$(1.) \qquad \varrho = \frac{r\partial r}{\partial\cdot\frac{r^2\partial\varphi}{\partial s}}.$$

Die Veranlassung zur Entwicklung dieser Formel gab mir die Erfahrung, daſs durch die bekannten Ausdrücke des Krümmungshalbmessers für Polarcoordinaten, und auch für rechtwinklige, die Krümmung der gemeinen Lemniscate von den Schülern nur nach sehr beschwerlichen Rechnungen gefunden werden konnte und daſs die Schuld wirklich nicht ganz ihrer Ungeübtheit zugeschrieben werden muſste; wie sich Jeder durch Anstellung des Versuchs überzeugen kann.

Die Gleichung der gewöhnlichen Lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

nimmt für Polarcoordinaten die Form

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

an. Bezeichnet man die Differentiale nach φ durch Accente, so erhält man

$$rr' = -a^2\sin 2\varphi,$$

also

$$a^4 = r^2r'^2+r^4 = r^2(r'^2+r^2) = r^2s'^2 \quad \text{oder} \quad s' = \frac{a^2}{r}.$$

Die obige Formel (1.) giebt daher für den Krümmungshalbmesser der Lemniscate:

$$\varrho = \frac{r\partial r}{\partial\cdot\frac{r^2}{s'}} = \frac{a^2 r\partial r}{\partial . r^3} = \frac{a^2}{3r}.$$

Setzt man $\frac{1}{r} = u$, so wird $s'^2 = r^2+r'^2 = \frac{u^2+u'^2}{u^4}$ und

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{r^2}{s'} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot(u^2+u'^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{u'(u+u'')}{(u^2+u'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher verwandelt sich die Formel (1.) in die folgende:

$$(2.) \quad \varrho = \frac{(u^2+u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u+u'')} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{u^2s'^3}{u+u''},$$

welche ich schon in No. (I.) benutzt und als eine einfachere als die bekannten, empfohlen habe.

No. VII.

Eine Wirkung der Schwungkraft.

Der schwere Punct A ist an der nicht schweren geraden Linie $HA = l$ (Fig. 4.) befestigt, die sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit w um die Axe HX dreht und durch die Schwungkraft des Puncts A um den Winkel $AHD = \alpha$ von der Axe entfernt hat. Zerlegt man die Beschleunigung der Schwere $AG = g$ in die beiden Componenten AF und AE, von denen die erste in der Richtung der Linie HA fällt und durch deren Befestigung in H aufgehoben wird, und die zweite, senkrecht gegen HX gerichtete, der Schwungkraft das Gleichgewicht hält, so hat man zur Bestimmung des Winkels α die Gleichung

$$w^2 l\sin\alpha = g\,\text{tang}\,\alpha.$$

Man erhält aus dieser Gleichung entweder

$$\sin\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\alpha = \frac{g}{lw^2}.$$

Also hat die Linie *HA* *zwei* Gleichgewichtslagen: entweder in der Drehungs-Axe selbst, oder, wenn sie sich um den durch die zweite Gleichuug bestimmten Winkel α von dieser Axe entfernt hat. Dieser Winkel wird aber *unmöglich,* sobald sein Cosinus gröfser als 1 oder

$$l < \frac{g}{w^2}$$

ist. Da $l\cos\alpha = HD = h$ ist, so giebt die zweite Gleichung

$$h = \frac{g}{w^2}.$$

Diese Höhe h, bis zu welcher sich durch den Schwung um die Axe *HX* die Puncte *A, B, C,* die an verschieden langen Linien befestigt sind, dem Aufhängungspuncte *H* nähern, hangt also nur von ihrer Winkelgeschwindigkeit w ab. Puncte, die in *H* an Linien befestigt sind, welche die Länge h nicht erreichen, bleiben daher, bei der Drehung der Axe *HX,* ruhig in dieser Axe hangen, während sich die übrigen in eine einzige Ebene *CC'* begeben, auf welcher die Axe *HX* senkrecht steht. Solche, an kürzeren Linien als *HD* befestigten Puncte haben also nur eine einzige Gleichgewichtslage, während alle, die an längeren Linien befestigt sind, deren zwei einnehmen können.

Trägt die Linie *AH* (Fig. 5.), statt einer einzigen Masse, in den Puncten *A* und *A',* zwei Massen m und m', und ist $AH = l$ und $A'H = l'$, so sind die Radien, welche diese Massenpuncte bei ihrer Drehung um die Axe *HX* durchlaufen, $AD = l\sin\alpha$ und $A'D' = l'\sin\alpha$, also die Schwungkräfte $DB = mw^2 l\sin\alpha$ und $D'B' = m'w^2 l'\sin\alpha$. Die Componenten der Schwere sind aber $AE = mg\,\text{tang}\,\alpha$ und $A'E' = m'g\,\text{tang}\,\alpha$. Die Spannungen *AF* und *A'F'* werden durch die Festigkeit des Puncts *H* aufgehoben. Stellt man sich nun die parallelen Kräfte *BD* und *B'D',* so wie *AE* und *A'E',* in der Axe *HD* wirkend vor, so müssen sie hier einander das Gleichgewicht halten; es mufs also die Gleichung

$$HD.DB + HD'.D'B' = HD.AE + HD'.A'E'$$

oder

$$l\cos\alpha.mw^2 l\sin\alpha + l'\cos\alpha.m'w^2 l'\sin\alpha = l\cos\alpha.mg\,\text{tang}\,\alpha + l'\cos\alpha.m'g\,\text{tang}\,\alpha$$

oder

$$\cos\alpha = \frac{g}{w^2}\cdot\frac{ml + m'l'}{ml^2 + m'l'^2}$$

Statt finden.

Auf diese Weise erhält man auch, wenn die Linie AH in den Entfernungen $l, l', l'', \dots$ mit den Massenpuncten $m, m', m'', \dots$ besetzt ist, für $\cos\alpha$ den allgemeinen Ausdruck

$$\cos\alpha = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{ml + m'l' + m''l'' + \cdots}{ml^2 + m'l'^2 + m''l''^2 + \cdots}.$$

Sind alle Massen gleich grofs und in n Puncten über die ganze Linie gleichförmig vertheilt, so findet sich

$$\cos\alpha = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{n(1+2+3+\cdots+n)}{l(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)} = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{3nn(n+1)}{ln(n+1)(2n+1)} = \frac{3g}{lw^2} \cdot \frac{n}{2n+1}.$$

Um den Winkel α für den Fall zu finden, wenn AH eine gleichförmig schwere Linie ist, hat man nur in der vorigen Formel $n = \infty$ zu setzen, was für $l\cos\alpha = HD = h'$,

$$h' = \frac{3g}{2w^2} = \tfrac{3}{2}h$$

giebt, so dafs also auch in diesem Falle die Linie h' von der Länge der Linie l unabhängig ist.

Diese Eigenschaft der Schwungkraft läfst sich an einer gut construirten Centrifugalmaschine, wie sie in physicalischen Cabinetten vorkommen, leicht nachweisen, und bietet so eine nützliche Vervollständigung dieses Apparats dar.

VIII.

Über die Gesetze des Stofses und die Ausflufsgeschwindigkeit des Wassers aus kleinen Öffnungen.

Nachdem die Optik mit Hülfe der Undulationstheorie bereits einen hohen Grad von Ausbildung erlangt hat und daher die Ansicht über die Natur der Materie, welche dieser Theorie zum Grunde liegt, mehr und mehr bei den Physikern an Geltung gewinnt, scheint es angemessen, diese Theorie auch zur Erklärung möglichst vieler Thatsachen zu benutzen, um neue Prüfungsmittel für sie zu gewinnen und eine gröfsere Einheit in die Auffassungsweise physicalischer Erscheinungen zu bringen. Ich habe daher versucht, die Gesetze des *Stofses* zweier Massentheile und die Formel für die *Ausflufsgeschwindigkeit* des Wassers aus kleinen Öffnungen durch die Molecularhypothese abzuleiten, und glaube, dafs man diesen Bemühungen einige Aufmerksamkeit schenken werde, da ganz elementare Betrachtungs-Arten und Rechnungen zu Resultaten führen, zu denen man sonst nur auf ziemlich dunkeln Wegen gelangt.

Wir schliefsen uns also hier an die bekannten Vorstellungen an, nach welchen ein Molecül ein *System* sehr vieler Atome und ein Körper eine Vereinigung sehr vieler Moleculen ist, die in Entfernungen von einander gehalten werden, in denen die gröfsten Dimensionen eines solchen Atomensystems oder Moleculs aufserordentlich oft enthalten sind. Diese Entfernungen von einander behalten die Moleculen durch den Einflufs der Elasticität, oder abstofsender Kräfte; mit denen sie auch der Annäherung jedes störenden Körpers widerstehen.

Ich will nun zunächst die Wirkung zweier solcher Moleculen oder Körpertheile auf einander untersuchen, wenn das erste A aus m Atomen besteht und in gerader Linie mit der gleichförmigen Geschwindigkeit g fortschreitet, während es von einem zweiten B aus μ Atomen bestehend, in derselben Linie, mit der Geschwindigkeit γ verfolgt wird.

$$\begin{array}{cccccc} B & B' & B'' & A & A' & A'' \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \rightarrow & & & \rightarrow & & \end{array}$$

Ist γ gröfser als g, so wird die Entfernung AB der beiden Moleculen bis auf den Radius $A'B'$ der Wirkungssphäre der Elasticität abnehmen. Einer weiteren Annäherung mögen sich darauf die *abstofsenden* Kräfte der Atome widersetzen; und zwar so, dafs jedes Atom einem andern, nach Verlauf einer Secunde, die Geschwindigkeit α mittheilt, also nach t Secunden die Geschwindigkeit αt. Da die Dimensionen der Körpertheile A und B gegen die Entfernung $A'B'$ aufserordentlich klein sind, so kann man annehmen, dafs alle mit *gleichen* Kräften auf einander einwirken. Es werden daher die m Atome in A' jedem Atome in B', also auch dem ganzen Molecüle, nach t Secunden die Geschwindigkeit $m\alpha t$ ertheilen, und die μ Atome in B' dem Molecüle A' die Geschwindigkeit $\mu\alpha t$, wenn nämlich die Entfernung $A'B'$ immer constant bleibt, oder sich nur unmerklich ändert. Findet aber das Spiel der abstofsenden Kräfte nur sehr kurze Zeit Statt, so wird dieser Fall eintreten. Da nun B' eine gröfsere Geschwindigkeit hat als A', so nähern sich Anfangs beide Puncte einander, wodurch B' von seiner Geschwindigkeit verliert und A' beschleunnigt wird. Wenn die sehr geringe Annäherung ihr Maximum erreicht hat, gehen beide Puncte mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, und diese Geschwindigkeit würden sie dauernd behalten, wenn durch irgend einen Einflufs, wie etwa durch Form-Änderung des Moleculs oder Atomensystems, die Wirkung der Elasticität gehemmt würde. Im Allgemeinen tritt aber dieser Fall nicht ein, sondern die Kräfte fahren fort zu wirken und vermindern noch ferner die Geschwindigkeit von B' und vermehren die des Moleculs A'. Dadurch wächst die

Entfernung zwischen A' und B' noch mehr, und wird zuletzt dem Radius der Wirkungssphäre der Atome wieder gleich; so dafs also, wenn unter dem Einflufs dieser Kräfte B' nach B'' und A' nach A'' gekommen ist, die Entfernung $B''A''$ der $B'A'$ gleich sein mufs. Da nun der Punct A'' jetzt eine gröfsere Geschwindigkeit als B'' hat, so treten beide Molecülen aus der Wirkungssphäre der Atome heraus und setzen jetzt wieder, wie vor dem Zusammentreffen, ihren Weg mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.

Nennt man g' die Geschwindigkeit des Molecüls A zur Zeit t, und γ' die des Molecüls B zu derselben Zeit, wobei t vom ersten Augenblicke des Zusammentreffens an gezählt wird, so hat man zur Bestimmung dieser Gröfsen die Gleichungen

$$(1.)\quad g' = g + \mu a t \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma - m a t.$$

Durchläuft während dieser Zeit das Molecül A den Raum r und das Molecül B den Raum ρ, so ist

$$(2.)\quad r = gt + \tfrac{1}{2}\mu a t^2 \quad \text{und} \quad \rho = \gamma t - \tfrac{1}{2} m a t^2,$$

oder auch

$$(3.)\quad 2r = (g'+g)t \quad \text{und} \quad 2\rho = (\gamma'+\gamma)t;$$

denn offenbar gelten für die Bewegung der Puncte A und B die einfachen Gesetze des Falles schwerer Körper an der Oberfläche der Erde, da beide während der sehr kleinen Zeit t mit unveränderlichen Kräften auf einander einwirken.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle: zunächst den einfacheren, wenn die Elasticitätskräfte in ihrer Thätigkeit nicht gehemmt werden; und dann den zusammengesetzteren, wenn eine solche Hemmung erfolgt. Gewöhnlich verfährt man bei der Entwickelung der Gesetze des Stofses umgekehrt, untersucht zunächst den Stofs harter Körper und leitet aus dessen Gesetzen den Stofs elastischer Massen ab; indessen wird dieses Verfahren nur deshalb befolgt, weil man die Gesetze des Stofses harter Körper aus Annahmen ableitet, die sich aus der hier angenommenen Hypothese als Folgerungen ergeben.

Im *ersten* Falle also, wenn die Massen elastisch sind, und *bleiben*, müssen die Räume r und ρ einander gleich werden, sobald die Endgeschwindigkeiten g' und γ' eintreten sollen; wie oben bereits bemerkt wurde. Man hat daher aus (3.) die Gleichung

$$(4.)\quad g'+g = \gamma'+\gamma.$$

Eliminirt man aber at aus (1.), so erhält man

$$(5.)\quad m(g'-g) = \mu(\gamma-\gamma'),$$

und aus diesen beiden Gleichungen:

$$(6.)\quad g' = g + \frac{2\mu(\gamma-g)}{\mu+m} \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma - \frac{2m(\gamma-g)}{\mu+m};$$

welches die bekannten Formeln für den *Stofs elastischer Massen* sind.

Im *zweiten* Falle, wenn die Massen nach dem Stofse ihre Elasticität *verlieren,* gehen beide mit der Geschwindigkeit fort, die sie gemeinschaftlich besafsen, als die Entfernung zwischen ihnen möglichst klein geworden war, oder als der Unterschied der durchlaufenen Räume r und ρ ein Maximum erreicht hatte. Es ist aber

$$\rho - r = (\gamma-g)t - \tfrac{1}{2}(\mu+m)t^2,$$

und diese Gröfse wird ein Maximum, wenn

$$\gamma - g - (\mu+m)at = 0$$

oder

$$at = \frac{\gamma-g}{\mu+m}$$

ist. Durch diesen Werth von at nehmen die Endgeschwindigkeiten g' und γ' die gemeinsame Gröfse

$$G = \frac{\mu\gamma+mg}{\mu+m}$$

an. Da g' und γ' zu gleicher Zeit den Werth G erreichen, so folgt diese Gleichung auch schon unmittelbar aus den Gleichungen (1.), wenn man $g'=\gamma'=G$ setzt und aus ihnen t eliminirt.

Dies ist der Ausdruck, den man für die Geschwindigkeit giebt, mit welcher zwei *harte* Massen m und μ, die sich mit den Geschwindigkeiten g und γ verfolgen, nach dem Stofse fortschreiten. Gewöhnlich unterscheidet man bei der Entwicklung der Gesetze des Stofses, mit scheinbarer Folgerichtigkeit, *absolut harte* Massen und *absolut elastische,* aber man sieht bei einigem Nachdenken leicht, dafs absolut harte Massen, d. h. solche, die aller Elasticitätskräfte beraubt wären, auch absolut unwirksam auf einander bleiben müfsten; denn nach der gewöhnlichen Annahme über die Natur der Materie kann man durch die blofse Vorstellung, dafs sich eine Materie einer andern nähert, die ruhende auch nicht ein Haar breit aus ihrer Stelle bewegen.

Multiplicirt man (4. und 5.) mit einander, so erhält man

$$\mu(\gamma'^2-\gamma^2) = m(g^2-g'^2)$$

oder

$$(7.)\quad \mu\gamma'^2 + mg'^2 = \mu\gamma^2 + mg^2;$$

welche Gleichung man den Satz von der ***Erhaltung der lebendigen Kräfte*** nach dem Stofse elastischer Massen nennt.

Ist $\mu = m$, so wird aus (3.)

$$(8.)\qquad g' = \gamma \quad \text{und} \quad \gamma' = g,$$

also ***vertauschen*** gleiche ***elastische*** Massen ihre Geschwindigkeiten nach dem Stofse.

Bewegt sich die Masse m der Masse μ ***entgegen***, ist also g negativ, und ist aufserdem noch m aufserordentlich viel gröfser als μ, so wird aus (3.)

$$g' = -g \quad \text{und} \quad \gamma' = 2g - \gamma.$$

Ruht aber die Masse m vor dem Stofse, ist also $g = 0$, so bleibt auch $g' = 0$ und es wird

$$\gamma' = -\gamma.$$

Also springt die Masse μ von m mit derselben Geschwindigkeit zurück, mit welcher sie diese Masse traf.

Die Gleichungen (3.) lassen sich auch so schreiben:

$$g' = \frac{\mu\gamma + mg}{\mu + m} + \frac{\mu(\gamma - g)}{\mu + m} \quad \text{und} \quad \gamma' = \frac{\mu\gamma + mg}{\mu + m} - \frac{m(\gamma - g)}{\mu + m}.$$

Ist nun g wieder negativ und

$$\mu\gamma = mg,$$

so wird

$$g' = g \quad \text{und} \quad \gamma' = -\gamma,$$

also springt auch in diesem Falle jede Masse von der andern mit derselben Geschwindigkeit zurück, die sie vor dem Stofse hatte.

Ganz so wie eine aufserordentlich grofse ***ruhende*** Masse m die Geschwindigkeit der Masse μ vernichtete und ihr eine der anfänglichen gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit gab, wirken auch die beiden Massen m und μ auf einander ein, wenn $\mu\gamma = mg$ ist. Sind in diesem Falle die Massen hart, oder verlieren vielmehr nach dem Stofse ihre Elasticität, so kommen sie beide, wie die Gleichung (7.) ausdrückt, zur Ruhe, sobald sie sich getroffen haben. Das Product aus Masse in Geschwindigkeit, welches man gewöhnlich ***Gröfse der Bewegung*** nennt, ist also ganz geeignet, die Gröfse der Wirkung zweier bewegten Massen auf einander auszudrücken. Nach den Vorstellungen über die Natur der Materie, die jetzt die Mehrzahl der Physiker angenommen hat, ist noch niemals ein Atom mit einem andern in Berührung gekommen, und doch wird der Satz, das Product mg sei ein Maafs für die Gröfse

der Kraft, fast immer, im Widerstreit mit diesen Ansichten, ausgesprochen. Ich glaube, man wird den Satz hier folgerechter finden, als an andern Orten.

Die Formeln für den Stofs *unvollkommen elastischer* Massen lassen sich auf ganz ähnliche Weise ableiten.

$$\begin{array}{cccc} B & B' \; B'' & A \; A' & A''. \\ \bullet \;\; \varrho \;\; \bullet \;\; \varrho' \;\; \bullet & & \bullet \;\; r \;\; \bullet \;\; r' \;\; \bullet & \end{array}$$

Die Kraft, mit der die Atome A und B einander abstofsen, sei Anfangs wieder α, und wenn A nach A' und B nach B' gekommen ist, möge die gröfste Annäherung zwischen beiden eingetreten und die Geschwindigkeit von A gleich g' und von B gleich γ' geworden sein, so dafs, wenn dies zur Zeit t geschehen ist, wieder die bereits aufgestellten Formeln

$$g' = g + \mu\alpha t; \quad r = gt + \tfrac{1}{2}\mu\alpha t^2,$$
$$\gamma' = \gamma - m\alpha t; \quad \varrho = \gamma t - \tfrac{1}{2}m\alpha t^2,$$
$$\varrho - r = (\gamma - g)t - \tfrac{1}{2}(m+\mu)\alpha t^2$$

gelten. Für $\alpha t = \frac{\gamma - g}{m+\mu}$ wird bekanntlich diese Differenz ein Maximum und erreicht für diesen Werth von t die Gröfse

$$\varrho - r = \frac{(\gamma - g)^2}{2\alpha(m+\mu)},$$

während die Geschwindigkeiten g' und γ' den gemeinsamen Werth

$$g' = \gamma' = \frac{mg + \mu\gamma}{m+\mu} = G$$

annehmen. Durch die Wirkung der Elasticitätskräfte möge nun aber die Anordnung der Atome in A und B so geändert worden sein, dafs die Molecülen jetzt auf einander mit der abstofsenden Kraft α' einwirken; welche Kraft während der Bewegung der Molecülen von A' nach A'' und von B' nach B'' thätig ist. Nennt man ihre Geschwindigkeiten in diesen Puncten g'' und γ'' und die während der Zeit τ von ihnen durchlaufenen Räume r' und ϱ', so erhält man zur Bestimmung dieser Gröfsen die Gleichungen

$$g'' = G + \mu\alpha'\tau; \quad r = G\tau + \tfrac{1}{2}\mu\alpha'\tau^2,$$
$$\gamma'' = G - m\alpha'\tau; \quad \varrho' = G\tau - \tfrac{1}{2}m\alpha'\tau^2.$$

Wenn

$$r + r' = \varrho + \varrho' \quad \text{oder} \quad \varrho - r = r' - \varrho'$$

geworden ist, so hören die Wirkungen der Elasticitätskräfte wieder auf, da jetzt A und B wieder in einer Entfernung von einander sich befinden, die dem Radius der Wirkungssphäre der abstofsenden Kräfte gleich ist, der durch den Über-

gang von α und α' nicht merklich geändert wurde. Setzt man nun die Werthe von $\varrho - r$ und $r' - \varrho'$ einander wirklich gleich, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(m+\mu)\alpha'\tau^2 = \frac{(\gamma-g)^2}{2\alpha(m+\mu)},$$

also

$$\alpha'\tau = \frac{\gamma-g}{m+\mu}\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}.$$

Mit Hülfe dieses Werths von τ findet man für die Geschwindigkeiten:

$$g'' = g + \frac{\mu(\gamma-g)}{m+\mu}\left(1+\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}\right),$$

$$\gamma'' = \gamma - \frac{m(\gamma-g)}{m+\mu}\left(1+\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}\right).$$

Diese Formeln für die Endgeschwindigkeiten unvollkommen elastischer Massentheile sind die bekannten, an andern Orten auf ganz anderem Wege gefundenen Ausdrücke. Für $\alpha' = \alpha$ erhält man aus ihnen die Formeln für den Stofs *vollkommen elastischer* Massen, und für $\alpha' = 0$ die für den Stofs *harter* Körper.

Wir wollen jetzt noch den Einflufs von n Molecülen

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$$

aufeinander untersuchen, die, entsprechend, aus

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ m_n$$

Atomen bestehen und einander auf einer geraden Linie mit den Geschwindigkeiten

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ \ldots\ g_n$$

verfolgen, während sie sich wechselseitig mit den Elasticitätskräften

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{n-1}$$

abstofsen, sobald sie in die Wirkungssphäre dieser Kräfte eingetreten sind.

Wir müssen hierbei offenbar annehmen, dafs, wenn die Geschwindigkeiten von der Linken zur Rechten gerichtet sind, $g_1 > g_2 > g_3 \ldots > g_n$ ist und die Molecülen sämmtlich zu gleicher Zeit sich einander bis auf den Radius der Wirkungssphären der abstofsenden Kräfte genähert haben. Nennt man dann

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \ldots\ \gamma_n$$

die Geschwindigkeiten, welche die Molecülen besitzen, nachdem t Secunden lang die benachbarten auf einander eingewirkt haben, und bezeichnet mit

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_n$$

die von ihnen in dieser Zeit durchlaufenen Räume, so hat man zur Bestim-

mung dieser $2n$ Gröfsen folgende $2n$ Gleichungen:

$$(9.)\quad \begin{cases} \gamma_1 = g_1 - m_2\alpha_1 t, \\ \gamma_2 = g_2 - (m_3\alpha_2 - m_1\alpha_1)t, \\ \gamma_3 = g_3 - (m_4\alpha_3 - m_2\alpha_2)t, \\ \gamma_4 = g_4 - (m_5\alpha_4 - m_3\alpha_3)t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n-1} = g_{n-1} - (m_n\alpha_{n-1} - m_{n-2}\alpha_{n-2})t, \\ \gamma_n = g_n + m_{n-1}\alpha_{n-1}t, \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} r_1 = g_1 t - \tfrac{1}{2}m_2\alpha_1 t^2, \\ r_2 = g_2 t - \tfrac{1}{2}m_3\alpha_2 - m_1\alpha_1)t^2, \\ r_3 = g_3 t - \tfrac{1}{2}m_4\alpha_3 - m_2\alpha_2)t^2, \\ r_4 = g_4 t - \tfrac{1}{2}m_5\alpha_4 - m_3\alpha_3)t^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-1} = g_{n-1}t - \tfrac{1}{2}(m_n\alpha_{n-1} - m_{n-2}\alpha_{n-2})t^2, \\ r_n = g_n t + \tfrac{1}{2}m_{n-1}\alpha_{n-1}t^2. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (9.) erhält man aus (10.) auch

$$(11.)\quad \begin{cases} 2r_1 = (\gamma_1 + g_1)t, \\ 2r_2 = (\gamma_2 + g_2)t, \\ 2r_3 = (\gamma_3 + g_3)t, \\ \dots\dots\dots \\ 2r_n = (\gamma_n + g_n)t. \end{cases}$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned} m_1 g_1 + m_2 g_2 + m_3 g_3 + \cdots + m_n g_n &= \Sigma mg, \\ m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n &= \Sigma m, \end{aligned}$$

so erhält man aus (10.), wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit m_1, m_2, m_3, ... m_n multiplicirt und die Producte addirt:

$$\Sigma mr = t\Sigma mg.$$

Wenn zur Zeit t die durchlaufenen Räume r_1, r_2, r_3, ... r_n sämmtlich einander gleich geworden sind und die gemeinschaftliche Gröfse r erreicht haben, trennen sich die Molecülen A_1, A_2, ... A_n wieder von einander und gehen mit den Geschwindigkeiten γ_1, γ_2, ... γ_n weiter. Die letzte Gleichung giebt dann

$$(13.)\quad r = t\frac{\Sigma mg}{\Sigma m}$$

und daher verwandelt sich jetzt (11.) in

$$(14.)\qquad \gamma_1+g_1=\gamma_2+g_2=\gamma_3+g_3=\cdots=\gamma_n+g_n=\frac{2\Sigma mg}{\Sigma m};$$

durch welche Gleichungen die Geschwindigkeiten, welche die Molecülen nach dem Stofse annehmen, sämmtlich gefunden werden können. Aus den Gleichungen (9.) ergiebt sich, auf dieselbe Weise wie (12.), auch

$$(15.)\qquad \Sigma m\gamma = \Sigma mg$$

oder

$$m_1(\gamma_1-g_1)+m_2(\gamma_2-g_2)+m_3(\gamma_3-g_3)+\cdots+m_n(\gamma_n-g_n) = 0.$$

Multiplicirt man die Coëfficienten von m_1, m_2, m_3, ... m_n dieser Gleichung entsprechend mit den einzelnen Werthen von $\frac{2\Sigma mg}{\Sigma m}$ aus (14.), so erhält man

$$m_1(\gamma_1^2-g_1^2)+m_2(\gamma_2^2-g_2^2)+m_3(\gamma_3^2-g_3^2)+\cdots+m_n(\gamma_n^2-g_n^2) = 0$$

oder

$$(16.)\qquad \Sigma m\gamma^2 = \Sigma mg^2;$$

so dafs also der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte auch für den simultanen Stofs beliebig vieler Massen-Elemente gilt.

Hört die Thätigkeit der Elasticitätskräfte auf, sobald alle Massen die gleiche Geschwindigkeit angenommen haben, oder $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\cdots=\gamma_n=\gamma$ geworden ist, so erhält man aus (15.) sogleich für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, welche alle nach dem Stofse erlangen:

$$(17.)\qquad \gamma = \frac{\Sigma mg}{\Sigma m}.$$

In diesem Falle ist wieder der Unterschied zweier von benachbarten Molecülen durchlaufener Räume ein Maximum; oder das ganze System hat die gröfste Zusammendrückung erfahren; denn z. B. aus (10.) ergiebt sich

$$r_1-r_2 = (g_1-g_2)t-\tfrac{1}{2}(m_2\alpha_1+m_1\alpha_1-m_3\alpha_2)t^2,$$

welche Differenz für

$$0 = g_1-g_2-(m_2\alpha_1+m_1\alpha_1-m_3\alpha_2)t$$

ein Maximum wird. Dieselbe Gleichung folgt aber auch aus (9.), wenn man $\gamma_1=\gamma_2$ setzt.

Theilt man die Molecülen A_1, A_2, ... A_n in mehrere Gruppen

$$A_1,\ \ldots\ A_a;\quad A_{a+1},\ \ldots\ A_b;\quad A_{b+1},\ \ldots\ A_c;\quad \ldots$$

und nimmt an, dafs sämmtliche Molecülen einer jeden Gruppe gleiche Geschwin-

digkeit haben, so läfst sich ein solches System als eine Reihe von linearen Körpern betrachten, die sämmtlich zu gleicher Zeit auf einander stofsen. Wenn nun diese Körper nach dem Stofse nicht zerreifsen sollen, so würde es genügen, anzunehmen, dafs alle ihre Theile nach dem Stofse wieder gleiche Geschwindigkeit haben; aber in diesem Falle, wo in den Gleichungen (9.) verschiedene der mit γ bezeichneten Gröfsen einander gleich gesetzt werden müssen und auch die entsprechenden g einander gleich sind, ergeben sich aus (9. und 10.) Bedingungsgleichungen, die nur in speciellen Fällen befriedigt werden können. Die Formeln (14. und 17.) bestimmen zwar auch in diesem Falle die gesuchten Geschwindigkeiten der Körper *nach* dem Stofse, aber die Resultate werden durch die Beobachtung nicht vollständig bestätigt; wie es auch der Natur der Sache nach nicht anders sein kann. Denn, nimmt man z. B. alle Massen, aufser der ersten stofsenden, ruhend und von gleicher Gröfse an, so lehren die Formeln nicht etwa, dafs nach dem Stofse alle Massen zur Ruhe kommen und die letzte sich von ihnen mit der Geschwindigkeit der stofsenden trennt, wie es doch die Erfahrung zu bestätigen scheint, sondern alle ruhenden wirken gegen die stofsende, wie eine einzige zusammenhängende Masse. Es wäre in der That auch seltsam, wenn sich ein Unterschied zwischen der Einwirkung der einzelnen Theile eines Körpers und zwei sich berührender Körper aus Formeln ergäbe, die einen solchen Unterschied gar nicht in Rechnung gebracht haben. Die gewöhnlichen und bekannten Reflexionen und elementaren Rechnungen über den Stofs der Körper lehren weiter nichts, als Das, was wir über den Stofs der Molecülen mitgetheilt haben; nur mit etwas weniger Klarheit; und Niemand wird sich durch das Raisonnement überzeugt finden, welches z. B. *Poisson* im zweiten Bande seiner Mechanik (pag. 32) anstellt, um die oben angeführte Erscheinung zu erklären; die aber bekanntlich leicht erklärlich ist, wenn die stofsenden Massen durch kleine Zwischenräume von einander getrennt sind.

Ich werde nun noch ganz kurz andeuten, wie sich durch die Anwendung der oben benutzten Hypothesen die *Ausflufsweise des Wassers* aus sehr kleinen Öffnungen im Boden eines Wasserbehälters leicht erklären läfst.

Stellen wir uns zu diesem Zwecke auf der geraden Linie Am (Fig. 6.) die Molecülen m, m_1, m_2, ... vertheilt vor, wo sie auf irgend eine Weise, etwa durch den Druck des Äthers und die Wirkung der zwischen ihnen thätigen Elasticitätskräfte, festgehalten werden. Sobald auf diese Molecülen die Schwerkraft in der Richtung von A nach m wirkt und m festgehalten wird,

nähern sie sich einander, und zwar so, dafs sich die Zwischenräume

$$l,\ l_1,\ l_2,\ \ldots \text{ in } \lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$$

verwandeln und die Molecülen $m, m_1, m_2, \ldots$ in die Lagen $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ kommen. Bezeichnet man nun die Schwerkraft, d. h. den Zuwachs an Geschwindigkeit, den ein fallender Körper in jeder Zeitsecunde erlangt, durch g, und die zwischen μ und μ_1, μ_1 und μ_2, μ_2 und μ_3, ... thätigen Elasticitätskräfte durch $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$; ferner die Strecken $Am, Am_1, Am_2, \ldots$ durch $h, h_1, h_2, \ldots$, so ist es naturgemäfs, anzunehmen, dafs sich die Veränderungen, welche die Strecken $l, l_1, l_2, \ldots$ erfahren haben, zu ihren Entfernungen von A, wie die Schwerkraft zu den zwischen ihnen thätigen Elasticitätskräften verhalten, oder dafs folgende Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$\frac{l-\lambda}{h} = \frac{g}{\varepsilon},$$

$$\frac{l_1-\lambda_1}{h_1} = \frac{g}{\varepsilon_1},$$

$$\frac{l_2-\lambda_2}{h_2} = \frac{g}{\varepsilon_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Wird jetzt das Molecül μ freigelassen, so fängt es an, zu fallen, und die über ihm befindlichen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ folgen ihm nach. Nach t Secunden mögen die Geschwindigkeiten dieser Molecülen $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ und die von ihnen durchlaufenen Räume $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ sein. Man hat dann offenbar zur Bestimmung dieser Gröfsen folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} \gamma = (g+\varepsilon)t & & \varrho = \tfrac{1}{2}(g+\varepsilon)t^2, \\ \gamma_1 = (g+\varepsilon_1-\varepsilon)t & \text{und} & \varrho_1 = \tfrac{1}{2}(g+\varepsilon_1-\varepsilon)t^2, \\ \gamma_2 = (g+\varepsilon_2-\varepsilon_1)t & & \varrho_2 = \tfrac{1}{2}(g+\varepsilon_2-\varepsilon_1)t^2, \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Sobald der Unterschied der von μ und μ_1 durchlaufenen Räume gleich $l-\lambda$ geworden ist, so ist μ wieder in die ursprüngliche Entfernung l von μ_1 getreten, beide Molecülen hören auf, auf einander zu wirken, und μ fällt nur durch die Einwirkung der Schwere weiter. Es ist aber

$$\varrho-\varrho_1 = \tfrac{1}{2}(2\varepsilon-\varepsilon_1)t^2$$

$$\text{und}\quad l-\lambda = \frac{gh}{\varepsilon}.$$

Setzt man also $\varrho - \varrho_1 = l - \lambda$ und erwägt, dafs $2\varepsilon - \varepsilon_1$ nicht merklich von ε verschieden sein kann, so erhält man

$$t = \frac{\sqrt{(2gh)}}{\varepsilon},$$

also

$$\gamma = \frac{g+\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{(2gh)}.$$

Offenbar sind aber die Elasticitätskräfte aufserodentlich viel gröfser als die Schwerkraft, so dafs man g gegen ε vernachläfsigen kann; also gelangt man zu dem *Torricellischen* Lehrsatze

$$\gamma = \sqrt{(2gh)}.$$

Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgehen, dafs diese Ableitung des wichtigen Satzes auf klar ausgesprochenen Hypothesen beruht, während er in den Lehrbüchern, selbst namhafter Physiker, auf eine Art bewiesen wird, die mindestens äufserst dunkel zu nennen sein dürfte.

Berlin im December 1852.

IX.

Über den Schwerpunct sphärischer Figuren.

Nimmt man die Kanten einer dreiseitigen Ecke, deren Ebenenwinkel α, β, γ und die gegenüberliegenden Kantenwinkel a, b, c sind, zu Axen schiefwinkliger Coordinaten x, y, z, und setzt

$$(\Delta y\,\Delta^2 z - \Delta z\,\Delta^2 y)\sin a = X;\quad (\Delta z\,\Delta^2 x - \Delta x\,\Delta^2 z)\sin b = Y;$$
$$(\Delta x\,\Delta^2 y - \Delta y\,\Delta^2 x)\sin c = Z,$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{[X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos\alpha - ZX\cos\beta - XY\cos\gamma]}$$

der Flächen-Inhalt eines Dreiecks, von welchem x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Ecken sind. Der Inhalt D eines Theils einer krummen Oberfläche kann so auf die mannigfachste Weise, z. B. durch folgende leicht verständliche Formel ausgedrückt werden:

$$D = \iint \partial x\,\partial y \sqrt{\Big[\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 \sin a^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 \sin b^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sin a \sin b \cos\gamma}$$
$$\sqrt{+ 2\frac{\partial z}{\partial x}\sin a \sin c \cos\beta + 2\frac{\partial z}{\partial y}\sin b \sin c \cos\alpha + \sin c^2\Big]}.$$

Für dieses Coordinatensystem ist die Gleichung einer Kugel vom Radius r:

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos a+2zx\cos b+2xy\cos c = r^2,$$

und der Inhalt D irgend einer sphärischen Figur auf dieser Kugel wird dann durch das Integral

$$D = r\theta\iint\frac{\partial x\,\partial y}{x\cos b+y\cos a+z}$$

ausgedrückt; wo

$$\sqrt{[1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c]}$$

durch θ bezeichnet worden ist.

Sind nun u, v, w die Coordinaten des Schwerpuncts der sphärischen Figur D, so ist

$$Du = r\theta\iint\frac{x\,\partial x\,\partial y}{x\cos b+y\cos a+z}; \quad Dv = r\theta\iint\frac{y\,\partial x\,\partial y}{x\cos b+y\cos a+z};$$

$$Dw = r\theta\iint\frac{z\,\partial x\,\partial y}{x\cos b+y\cos a+z},$$

folglich

$$D(u\cos b+v\cos a+w) = r\theta\iint\partial x\,\partial y.$$

Es ist aber

$$\sin c\iint\partial x\,\partial y = C$$

die *schiefwinklige* Projection der Figur D auf die Ebene der xy; daher wird

$$u\cos b+v\cos a+w = \frac{r\theta C}{D\sin c}.$$

Errichtet man im Anfangspuncte 0 der Coordinaten x, y, z, auf der Ebene der yz, zx, xy, senkrechte Axen OX', OY', OZ', d. h. construirt zu der ersten Ecke die *Polar-Ecke;* und bilden deren Kanten mit den Axen der x, y, z, entsprechend, die Winkel a, b', c', so ist bekanntlich

$$\theta = \sin a\cos a' = \sin b\cos b' = \sin c\cos c'.$$

Daher ist die Seite rechts in der vorigen Gleichung:

$$= \frac{rC}{D}\cos c'.$$

Bezeichnet man noch mit A und B die schiefwinkligen Projectionen von D auf die Ebenen der yz und zx und setzt

$$(1.) \quad x' = \frac{rA}{D}, \quad y' = \frac{rB}{D}, \quad z' = \frac{rC}{D},$$

so erhält man offenbar zur Bestimmung der Coordinaten u, v, w des Schwerpuncts der Figur D, durch gehörige Buchstabenvertauschung, die drei Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} u + v\cos c + w\cos b = x'\cos a', \\ u\cos c + v + w\cos a = y'\cos b', \\ u\cos b + v\cos a + w = z'\cos c'. \end{cases}$$

Stellt man sich jetzt durch den Schwerpunct eine Ebene gelegt vor, welche der Ebene $Y'OX'$ der Polar-Ecke parallel läuft, also auf der Axe OX senkrecht steht, so schneidet diese Ebene auf der Axe OX eine Strecke ab, welche als die *senkrechte* Projection der Coordinaten u, v, w auf diese Axe angesehen werden kann, mithin $u + v\cos c + w\cos b$ ist. Auf der Axe OX' schneidet die Ebene aber ein Stück ab, welches mit dem Cosinus des Winkels a', den die Axen OX und OX' mit einander machen, multiplicirt werden mufs, um seine Projection auf OX zu finden: daher ist das auf der Axe OX' bestimmte Stück gleich x'; wie sich aus der ersten der Gleichungen (2.) sogleich ergiebt. Die Gleichungen (2.) lehren also offenbar, dafs x', y', z' die *schiefwinkligen* Coordinaten des Schwerpuncts sind, wenn die Kanten der Polar-Ecke zu Coordinaten-Axen genommen werden. Da diese Kanten bekanntlich mit einander die Winkel $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ machen, so findet man durch die Projection der Coordinaten des Schwerpuncts auf die Axen OX', OY', OZ' sogleich:

$$(3.)\quad \begin{cases} + x' - y'\cos\gamma + z'\cos\beta = u\cos a', \\ - x'\cos\gamma + y' - z'\cos\alpha = v\cos b', \\ - x'\cos\beta - y'\cos\alpha + z' = w\cos c'. \end{cases}$$

Die Entfernung ϱ des Schwerpuncts vom Mittelpuncte O der Kugel ist demnach:

$$\varrho = \frac{r}{D}\sqrt{[A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha - 2CA\cos\beta - 2AB\cos\gamma]}.$$

Schneidet man auf den Kanten OX, OY, OZ die Strecken

$$x'\cos a' = \frac{rA\sin b\cos\gamma}{D};\quad y'\cos b' = \frac{rB\sin c\cos\alpha}{D};\quad z'\cos c' = \frac{rC\sin a\cos\beta}{D}$$

ab und legt durch deren Endpuncte Ebenen, welche senkrecht auf diesen Kanten stehen, so liegt der gemeinschaftliche Durchschnittspunct dieser Ebenen im Schwerpuncte. Da also diese Strecken die senkrechten Projectionen von ϱ auf die Kanten darstellen, so braucht man jene nur durch ϱ zu dividiren, um die Cosinus der Winkel zu finden, welche ϱ mit den Kanten bildet.

Das Resultat dieser Untersuchung ist also folgendes:

Man stelle sich unter OX, OY, OZ die drei Kanten einer dreiseitigen Ecke vor, deren Spitze O den Mittelpunct einer Kugel vom Radius r einnimmt, auf welcher eine sphärische Figur gezeichnet ist, die den Inhalt D hat. Die Inhalte der *schiefwinkligen* Projectionen der Figur D auf die Ebenen YOZ, ZOX, XOY mögen A, B, C sein. Construirt man nun zu dieser Ecke die *Polar-Ecke*, deren auf den bezeichneten Ebenen senkrechte Kanten OX', OY', OZ' sind, und bestimmt auf diesen Kanten durch die Proportionen

$$D:A = r:x',$$
$$D:B = r:y',$$
$$D:C = r:z'$$

die Strecken x', y', z', so bilden dieselben die *schiefwinkligen* Coordinaten des *Schwerpuncts* der Figur D, wenn man die bezeichneten Kanten der Polar-Ecke zu Coordinaten-Axen nimmt.

Soll demnach z. B. der Schwerpunct eines sphärischen Dreiecks D, welches die Seiten ra, rb, rc hat, gefunden werden, so darf man für die erwähnten schiefwinkligen Projectionen A, B, C des Dreiecks D nur die Kreis-Ausschnitte

$$A = \tfrac{1}{2}r^2a; \quad B = \tfrac{1}{2}r^2b; \quad C = \tfrac{1}{2}r^2c$$

nehmen, wodurch sich die Coordinaten des Schwerpuncts des Dreiecks D auf die Kanten der Polar-Ecke als

$$x' = \frac{ar^3}{2D}; \quad y' = \frac{br^3}{2D}; \quad z' = \frac{cr^3}{2D}$$

ergeben. Aus (3.) erhält man dann die Coordinaten u, v, w des Schwerpuncts in Bezug auf die Axen welche durch die Ecken des Dreiecks gelegt sind.

Die hier benutzten Vorstellungen lassen sich auch in anderen Fällen anwenden; wie ich es später in diesen Miszellen nachweisen werde.

Berlin im Januar 1853.

21.

Aufgaben.

---

1. (Von dem Herrn Dr. *Kulik*, K. K. Rath und Prof. der höheren Mathematik an der Universität zu Prag.)

Bekanntlich lassen sich aus den vier Seiten eines im Kreise eingeschriebenen *Vierecks* die Diagonalen, der Inhalt und die Halbmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises finden. Wie findet man dieselben Gröfsen für ein im Kreise eingeschriebenes *Fünfeck*, dessen fünf Seiten gegeben sind?

2. (Vom Herausgeber dieses Journals.)

A. Es sei ein *geradliniges, ebenes Vieleck* gegeben. Die Entfernungen eines gewissen Puncts P von den *Ecken* des Vielecks seien x_1, x_2, x_3, x_4, ...; die Entfernungen des Puncts P an den *Seiten* des Vielecks (die Perpendikel aus P auf die Seiten) seien y_1, y_2, y_3, y_4, ...

Man sucht diejenigen vier Puncte P, für welche

(1.) $x_1+x_2+x_3+x_4 \ldots\ldots = \text{Min.}$,
(2.) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \ldots\ldots = \text{Min.}$,
(3.) $y_1+y_2+y_3+y_4 \ldots\ldots = \text{Min.}$,
(4.) $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 \ldots\ldots = \text{Min.}$ ist.

Der die Bedingungen (2.) erfüllende Punct P ist der *Mittelpunct der Entfernungen* oder der *Schwerpunct der Ecken* des Vielecks. (Man sehe darüber und wegen des Puncts *kleinster Entfernung* der Ecken, welcher der Bedingung (1.) entspricht, das Lehrbuch der Geometrie des Herausgebers; Berlin bei G. Reimer, 1826. 1. Band. S. 185 etc.).

B. Es sei ein *Polyëder, von Ebenen umschlossen*, gegeben. Die Entfernungen eines gewissen Puncts P von den *Ecken* des Polyëders seien x_1, x_2, x_3, x_4; ....; die Entfernungen des Puncts P von den *Kanten* des Polyëders (die Perpendikel aus P auf die Kanten) seien y_1, y_2, y_3, y_4, ..., und die Entfernungen des Puncts P von den *Seitenflächen* des Polyëders (die Perpendikel aus P auf die Seitenflächen) z_1, z_2, z_3, z_4, ...

Man sucht diejenigen sechs Puncte P, für welche

$$(5.)\quad x_1+x_2+x_3+x_4\ldots\ldots = \text{Min.},$$
$$(6.)\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\ldots\ldots = \text{Min.},$$
$$(7.)\quad y_1+y_2+y_3+y_4\ldots\ldots = \text{Min.},$$
$$(8.)\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2\ldots\ldots = \text{Min.},$$
$$(9.)\quad z_1+z_2+z_3+z_4\ldots\ldots = \text{Min.},$$
$$(10.)\quad z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2\ldots\ldots = \text{Min.},$$

ist.

C. Da sich jede Gleichung vom *vierten* Grade nach diesem oder jenem der Verfahren, z. B. von *Euler, Waring, Descartes, Bombelli, Lagrange, Pilatte, Gergonne* etc. (Man sehe z. B. des Herausgebers Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Berlin bei G. Reimer, 1825, S. 581 bis 590), anders als Gleichungen von höheren Graden, *ohne* Proben und Näherung, unmittelbar auflösen läfst; nemlich mit Hülfe von Gleichungen *dritten* Grades, deren Wurzeln ihrerseits in allen Fällen, entweder nach der *Cardani*schen Regel, oder, wo diese die Wurzeln nicht in reeller Form giebt, durch goniometrische Functionen sich finden lassen: so müssen sich auch in allen Fällen die Wurzeln jeder Gleichung vom vierten Grade, in geschlossenen Formeln, unmittelbar durch die Coëfficienten der Potenzen von x ausdrücken lassen.

Der Herausgeber erinnert sich nicht, dergleichen *unmittelbare* Ausdrücke irgendwo angetroffen zu haben. Sie sind vielleicht, ihrer allerdings grofsen Weitläuftigkeit wegen, und da sie entbehrt werden können, gemieden worden. Es wäre indessen doch nicht ohne Interesse, diese Ausdrücke aufzustellen.

D. Da die Gleichung *dritten* Grades $x^3+ax^2+bx+c=0$, für den Fall, wenn der Coëfficient c gleich *Null* ist, in die Gleichung *zweiten* Grades $x^2+ax+b=0$ übergeht, so müssen auch aus den Ausdrücken, welche für die Gleichung *dritten* Grades x geben, für $c=0$, diejenigen für die Gleichungen *zweiten* Grades hervorgehen. Dies zu zeigen ist bekanntlich nicht ganz leicht. Es wäre nun auch nachzuweisen, dafs und wie die Ausdrücke von x für $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ in diejenigen von x für $x^3+ax^2+bx+c=0$ in dem Falle $d=0$ übergehen.

22.

Der *Eisenstein*sche Satz über Reihen-Entwickelung algebraischer Functionen.

(Von Herrn Prof. *Heine* zu Bonn.)

In dem Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, vom Juli 1852, S. 441, findet sich eine kurze Notiz, in welcher *Eisenstein* einen wichtigen Satz über algebraische Functionen ohne Beweis aufstellt, indem er die weitere Ausführung einer künftigen Mittheilung vorbehält, die sein früher Tod vereitelte. Die *Eisenstein*sche Notiz enthält Folgendes:

„Entwickelt man die Quadratwurzel aus $1+x$, etwa nach dem bi„nomischen Satze für gebrochene Exponenten, in eine unendliche Reihe „nach steigenden Potenzen von x, und sucht die sich ergebenden ratio„nalen Coëfficienten auf ihre *kleinste Benennung* zu bringen, so be„merkt man, dafs nur Potenzen von 2 in den Nennern derselben zurück„bleiben, während alle übrigen Factoren des Nenners gegen Factoren „des Zählers aufgehoben werden können; auch ist der Exponent der im „Nenner des allgemeinen Gliedes verbleibenden Potenz von 2 immer „kleiner als der doppelte Exponent von x (und zwar beiläufig gesagt „um so viel, als die Anzahl der Einheiten beträgt, mit denen der Ex„ponent von x nach dem Dual-System geschrieben wird), so dafs es „genügt, $4x$ statt x zu setzen, um alle Nenner wegzuschaffen und die „Coëfficienten der Reihe in ganze Zahlen zu verwandeln. Die Betrach„tung dieses, wahrscheinlich längst bekannten speciellen Falles führte mich „auf die Entdeckung einer merkwürdigen, allen algebraischen Functionen „gemeinschaftlichen Eigenthümlichkeit. In jeder Reihen-Entwickelung „dieser Art, wenn sie nur aus einer *algebraischen Function* stammt, „mag dieselbe übrigens explicite oder implicite gegeben sein, kommen in „sämmtlichen Coëfficienten, so fern dieselben rational sind, als nothwendige „Nenner, d. h. als solche, die sich nicht weiter gegen Factoren des „Zählers aufheben lassen, stets nur eine *endliche Anzahl ganz be„stimmter Primfactoren* und deren Potenzen vor; es sind diese Prim„zahlen zugleich die Divisoren einer aus der algebraischen Gleichung,

„welcher die Function Genüge leistet, leicht zu bildenden characteristischen „Zahl, nämlich ihrer dem speciellen Werthe $x=0$ entsprechenden, von „*Gaufs* sogenannten Determinante, welche bekanntlich nicht verschwinden „darf, wenn die Reihen-Entwicklung überhaupt möglich sein soll; endlich „kann statt x immer ein solches Vielfache von x gesetzt werden, dafs „alle Coëfficienten der Reihe in ganze Zahlen übergehen. Nachdem diese „allgemeine Eigenschaft erst bekannt war, fiel es nicht schwer, dieselbe „durch die Methode der unbestimmten Coëfficienten zu erweisen und „auch auf die aus der Auflösung eines Systems von beliebig vielen „algebraischen Gleichungen hervorgehenden Entwicklungen auszudehnen. „Die wichtigsten Anwendungen der so erhaltenen Sätze habe ich auf „Fälle gemacht, in welchen die algebraischen Functionen als Integrale von „Differential-Gleichungen definirt werden, und wo diese Differential-Glei-„chungen für eine einfache Reihen-Entwicklung geeignet sind, während die, „vielleicht sehr complicirte Darstellung in endlicher Form ganz unbekannt „bleibt und für diesen Zweck auch wirklich ganz aus dem Spiele ge-„lassen werden kann. Das Einzelne der hierauf bezüglichen Unter-„suchungen mag für eine künftige Mittheilung vorbehalten bleiben. Eine „andere sehr einfache Art der Anwendung beruht darauf, dafs jede „Reihen-Entwicklung mit rationalen Coëfficienten, für welche die obi-„gen Bedingungen nicht erfüllt werden, sicher aus einer transcendenten, „d. h. *nicht* algebraischen Function, hervorgegangen sein mufs. Da z. B. in „der bekannten logarithmischen Reihe

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots,$$

„wenn man hinreichend weit fortgeht, jede beliebige, noch so grofse „Primzahl als Nenner eines Coëfficienten angetroffen wird, so folgt hier-„aus, dafs der Logarithmus keine algebraische, sondern eine wesentlich „transcendente Function ist. Ähnliches gilt von der Reihe für e^x, und „unendlich vielen andern."

Nachdem der Urheber des Theorems die in demselben ausgesprochene Eigenschaft algebraischer Functionen einmal entdeckt hatte, war es nicht schwer, den nachfolgenden Beweis desselben zu finden.

1.

Wir gehen von der Betrachtung der Reihe aus, welche $(1+x)^n$, nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt, giebt. Es bedeutet n eine positive

oder negative rationale Zahl, die gleich $\frac{g}{h}$ sein mag, indem unter g und h ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler verstanden werden, so dafs in der binomischen Reihe der Bruch

$$b = \frac{g(g-h)(g-2h)\dots(g-(m-1)h)}{1.2.3\dots\dots\dots m}$$

der Coëfficient von $\left(\frac{x}{h}\right)^m$ ist. Bringt man diesen Bruch auf die kleinste Benennung, so wird sein Nenner nur durch solche Primzahlen theilbar sein, welche auch h (den Nenner von n) theilen. Zunächst ist nämlich klar, dafs, wenn eine Primzahl q, die in dem Nenner von b explicite oder implicite (als Vielfaches von q) vorkommt, h theilt, diese Primzahl gegen keinen Factor des Zählers sich aufheben kann, also im Nenner, *nach* der Reduction des Bruchs, grade so oft als Factor erscheint, wie *vorher*. Jede andere Primzahl p wird aber, wie sogleich gezeigt werden soll, eben so oft, oder einmal mehr, im Zähler als im Nenner enthalten sein; hebt sich also aus diesem weg.

Um diese Eigenschaft der p zu erweisen, theile man den *Nenner* von b in Gruppen, deren jede p aufeinanderfolgende Zahlen enthält, so dafs nur in der letzten Gruppe deren weniger als p vorkommen können; und zwar wird dieser Fall immer vorkommen, wenn m nicht durch p theilbar ist. Es bestehe z. B. die erste und die zweite Gruppe resp. aus den Gliedern $1.2.3\dots p$ und $(p+1)(p+2)\dots(2p)$. In jeder Gruppe, die letzte im Allgemeinen ausgenommen, wird *ein*, und *nur ein* durch p theilbares Glied vorkommen; und zwar ist dies immer das *letzte* Glied der Gruppe.

Theilt man den *Zähler* in ähnliche Gruppen, deren erste also $g(g-h)(g-2h)\dots(g-(p-1)h)$ ist, so wird in jeder derselben, mit Ausnahme der letzten, *ein* und *nur ein* durch p theilbares Glied vorkommen müssen (und zwar wird dasselbe in der Regel nicht erst das letzte Glied der Gruppe sein), während in der letzten ein durch p theilbares Glied vorkommen kann, und jedenfalls auch vorkommt, wenn m durch p theilbar ist. Man sieht dies leicht, wenn man erwägt, dafs g und h keinen gemeinsamen Theiler haben und daher die Congruenz

$$g - zh \equiv 0 \text{ mod. } p$$

eine Wurzel z hat, die zwischen 0 und $p-1$ liegt, *eine* zwischen p und $2p-1$, u. s. w. Es befinden sich daher im Zähler eben so viele Glieder, welche durch p theilbar sind, als im Nenner; oder sogar eins mehr.

Unter diesen durch p theilbaren Gliedern werden auch solche sein können, die durch eine höhere als die erste Potenz von p theilbar sind. Dadurch, dafs man Gruppen von p^a Gliedern bildet, findet man, mittels eines dem obigen ganz ähnlichen Verfahrens, nämlich durch Betrachtung der Congruenz

$$g - zh \equiv 0 \text{ mod.} p^a,$$

dafs im Zähler eben so viele Glieder durch p^a theilbar sind, wie im Nenner, oder sogar eins mehr. Wir haben daher folgenden Satz:

> *Entwickelt man $(1+x)^{\frac{g}{h}}$ nach aufsteigenden Potenzen von x, so enthalten die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x, in ihrer kleinsten Benennung, keine andern Nenner als solche, die in Potenzen von h aufgehen. Diese Nenner sind also nur durch solche Primzahlen theilbar, welche auch Theiler von h sind.*

So z. B. können in der Entwickelung von $(1+x)^{\frac{4}{15}}$ alle Nenner, bis auf die Potenzen von 3 und 5, weggeschafft werden.

Anm. Auf folgende Art läfst sich ein Ausdruck für die höchste Potenz von p aufstellen, welche $1.2.3 \ldots . m$ theilt. Man zerlege m in die Form

$$m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r,$$

wo durch die a positive ganze Zahlen kleiner als p bezeichnet werden, die auch zum Theil Null sein können. Eine solche Zerlegung kann *nur auf eine Art* geschehen. Es giebt dann unter den Zahlen von 1 bis m:

$$\begin{array}{ll}
a_r p^{r-1} + a_{r-1} p^{r-2} + a_{r-2} p^{r-3} + \cdots + a_2 p + a_1 & \text{durch } p, \\
a_r p^{r-2} + a_{r-1} p^{r-3} + a_{r-2} p^{r-4} + \cdots + a_2 & \text{durch } p^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_r p^2 + a_{r-1} p + a_{r-2} & \text{durch } p^{r-2}, \\
a_r p + a_{r-1} & \text{durch } p^{r-1}, \\
a_r & \text{durch } p^r
\end{array}$$

theilbare Zahlen, so dafs die höchste Potenz von p, welche das Product $1.2.3, \ldots m$ theilt, die Gröfse

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r) + (a_2 + \cdots + a_r) p + \cdots + (a_{r-1} + a_r) p^{r-2} + a_r p^{r-1}$$

zum Exponenten hat. Z. B. für $m = 131$ setze man $p = 7$. Dann ist

$$131 = m = 5 + 4.7 + 2.7^2,$$

also das Product $1.2.3 \ldots 131$ noch durch 7^{20} theilbar. Die höchste Potenz von 3, die in dasselbe Product aufgeht ist 3^{62}, da

$$131 = 2 + 1.3 + 2.3^2 + 3^3 + 3^4 \text{ ist.}$$

2.

Eine irrationale Zahl nennt man eine solche, welche durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Erhebung zu *positiven* Potenzen aus ganzen rationalen Zahlen entsteht. Wurde die Division nicht angedeutet, so soll die Zahl eine *ganze* heifsen; so dafs eine ganze Zahl rational, oder irrational sein kann. Dem Worte *Primzahl* geben wir keinen erweiterten Begriff; nur die rationalen Zahlen 2, 3, 5 etc. werden darunter verstanden. Eine ganze Zahl heifse *theilbar* durch eine zweite ganze Zahl, wenn die erste sich als Product der zweiten und einer dritten ganzen Zahl vorstellen läfst. Die beiden letzten Zahlen heifsen *Theiler* oder *Factoren* der ersten.

Man sieht leicht, dafs sich jede irrationale Zahl als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellen läfst, deren eine ihr *Zähler*, die andere ihr *Nenner* heifst. So z. B. ist $\sqrt{(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}})}$ gleich dem Quotienten von $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$ und $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{3}$ ist der Nenner von $\sqrt{(1-\sqrt{\tfrac{2}{3}})}$. Verbindet man zwei ganze Zahlen durch Addition, Subtraction und Multiplication, oder erhebt man eine solche Zahl zu einer positiven Potenz, so entsteht wieder eine ganze Zahl.

3.

Entwickelt man das Polynom

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m)^n$$

nach aufsteigenden Potenzen von x, so wird der Coëfficient einer jeden Potenz von x, *erstens* aus Binomialcoëfficienten, *zweitens* aus ganzen positiven Potenzen der a, und endlich auch aus negativen Potenzen non a_0 durch Addition, Subtraction und Multiplication zusammengesetzt sein. Beachtet man, dafs nach (§. 1.) die erwähnten Binomialcoëfficienten in ihrer kleinsten Benennung keine andern Nenner enthalten können, als Potenzen des Nenners von n, so findet man folgenden Satz:

> Bedeuten die Gröfsen a rationale oder irrationale Zahlen, so werden sich die Coëfficienten sämmtlicher Potenzen von x in der Entwickelung von
>
> $$(a_0+a_1x+a_2x^2\ldots+a_mx^m)^n$$
>
> nach aufsteigenden Potenzen von x, als Quotienten zweier ganzen Zahlen darstellen lassen, deren eine (der Nenner) ein Product aus Potenzen der Nenner der a, des Zählers von a_0 und des Nenners von n ist.

4.

Durch Addition, Subtraction und Multiplication zweier Reihen oder ganzen Functionen von x kommen keine neuen Primzahlen in die Nenner; durch

Erhebung einer nach x geordneten Function zu einer positiven oder negativen Potenz (§. 3.), nur eine beschränkte Anzahl derselben. Da sich aber jede algebraische Function einer Veränderlichen x durch eine gewisse Anzahl der vorgenannten Operationen aus x und Constanten (die man sich nicht als transcendent vorstellen darf, wie z. B. sin 2, sondern höchstens als irrational) zusammensetzen läfst, so findet man (§. 2.) folgenden Satz:

Läfst sich eine algebraische Function einer Veränderlichen x nach aufsteigenden Potenzen derselben entwickeln, so können die mit den Potenzen von x multiplicirten constanten Coëfficienten als Brüche dargestellt werden, deren Nenner Producte aus Potenzen einer beschränkten Anzahl ganzer Zahlen sind.

Man darf nicht glauben, dafs dieser Satz schon unmittelbar mit dem ersten Theile des zu beweisenden Satzes übereinstimmt. Es ist nämlich zu zeigen, dafs in solchen Reihen die Coëfficienten, *insofern sie rational sind,* eine endliche Anzahl bestimmter Primfactoren und deren Potenzen enthalten. (Die *Exponenten* dieser Potenzen können natürlich in unendlicher Anzahl vorkommen). Es wäre nun wohl denkbar, dafs eine Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner irrationale ganze Zahlen und deren Nenner aufserdem Producte aus Potenzen einer *endlichen* Anzahl gegebener ganzer Zahlen sind, dennoch, wenn die Brüche rational werden, Nenner enthalte, die durch alle möglichen Primzahlen getheilt werden können. Das gewonnene Resultat stimmt aber offenbar mit dem gesuchten überein, wenn folgende Eigenschaften irrationaler Zahlen erwiesen werden können:

a) Sind Z und N irgend welche ganze Zahlen, g und h rationale ganze Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen rationalen Theiler haben: so kann $\frac{Z}{N}$ nur dann gleich $\frac{g}{h}$ sein, wenn Z durch g und N durch h theilbar ist.

b) Eine Zahl N, und ihre Potenzen, sind nur durch eine endliche Anzahl verschiedener Primzahlen theilbar.

Mit dem Beweise dieser Sätze, welche einer Theorie der irrationalen Zahlen angehören, werden wir die gegenwärtige Abhandlung schliefsen; zunächst aber zu dem allgemeinen Falle der Reihen-Entwickelung impliciter Functionen uns wenden, welcher den eben behandelten umfafst, ohne die Eigenschaften irrationaler Zahlen vorauszusetzen.

5.

Der zweite Theil des *Eisenstein*schen Satzes beschäftigt sich mit dem Falle, wo eine Function von x, welche die Wurzel einer algebraischen Gleichung im weiteren Sinne ist, in eine nach Potenzen von x aufsteigende Reihe mit rationalen Coëfficienten entwickelt werden kann. Es wird behauptet, dafs die nothwendigen Nenner dieser Coëfficienten nur durch eine endliche Anzahl verschiedener Primzahlen theilbar sind.

Die allgemeinste Form einer algebraischen Gleichung zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und einer abhängigen y ist die, dafs eine gegebene algebraische Function von x und y Null sein soll. Wir müssen annehmen, dafs die Constanten, welche in dieser Function vorkommen, höchstens irrationale Zahlen, aber nicht transcendente sind. Unter dieser Voraussetzung kann die gegebene Gleichung, wie man weifs, durch Multiplication mit geeigneten Factoren auf die Form einer algebraischen Gleichung im engern Sinne gebracht werden, d. h. auf die Form

$$f(y,x) = 0,$$

wo $f(y,x)$ eine ganze Function von x und y, mit rationalen ganzzahligen Coëfficienten ist. Jede Wurzel der ursprünglichen Gleichung wird auch eine Wurzel der letzten sein, die wir uns schon von gleichen Wurzeln befreit vorstellen. Hierdurch wird allerdings noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dafs einige Wurzeln für besondere Werthe von x, z. B. für $x=0$, einander gleich seien.

Die Gleichung $f(y,x)=0$ sei nach y vom m^{ten} Grade, und habe also die Form

$$f(y,x) = A_0y^m + A_1y^{m-1} + \cdots + A_{m-1}y + A_m = 0,$$

wo die A ganze Functionen von x mit rationalen ganzen Coëfficienten sind, die sich für $x=0$ auf a_0, a_1, a_m reduciren mögen, so dafs für $x=0$,

$$f(y,0) = a_0y^m + a_1y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}y + a_m = 0,$$

ist. Hier sind die a rationale ganze Zahlen; es können auch einige von ihnen Null sein, aber nicht alle zugleich, wenn man die A von ihrem gröfsten, allen gemeinschaftlichen Theiler befreit hat. Diejenige Wurzel der Gleichung $f(y,x)=0$, welche wir betrachten, die also durch eine Potenzenreihe mit rationalen Coëfficienten ausgedrückt ist, sei

$$y_0 = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots,$$

so dafs c_0 eine rationale Wurzel der Gleichung $f(y,0)=0$ ist. Es ist nun

zu bezweisen, dafs die Nenner der c nur durch eine endliche Anzahl verschiedener Primzahlen theilbar sind.

Offenbar wird es genügen, wenn man den Beweis für alle c, von einem bestimmten, dem n^{ten} an, giebt, da c_0. c_1, bis zu c_n hin, gewifs nur eine endliche Anzahl von Nennern haben, indem die Anzahl dieser Glieder endlich ist.

6.

Wir behandeln nun zunächst den Fall, dafs $f(y,0)=0$ nicht mehrere Wurzeln hat, die gleich c_0 sind, dafs also

$$ma_0c_0^{m-1}+(m-1)a_1c_0^{m-2}+\cdots+2a_{m-2}c_0+a_{m-1}$$

nicht verschwindet. Es ist dieser Ausdruck nämlich gleich

$$\frac{\partial f(y,0)}{\partial y},$$

für $y=c_0$.

Man gehe zunächst, von c_0 anfangend, in der Reihe der c bis zu einem solchen, dessen Index gröfser als der Grad von A_m ist (§. 5.). Es ist leicht zu sehen, welche Primzahlen p in der unendlichen Reihe der c, von dem bezeichneten an, in den Nennern vorkommen dürfen. Kommt nämlich die Primzahl p zuerst in dem Nenner von c_n als Theiler vor (wo nun n gröfser als der Grad von A_m ist), so wird sie in allen ganzen positiven Potenzen von y_0 gleichfalls zuerst in dem mit x^n multiplicirten Gliede sich zeigen können; und zwar enthalten $y, y^2, y^3, \ldots y^m$, nach dem polynomischen Lehrsatze, den Nenner p im Coëfficienten von x^n resp. in folgender Verbindung:

$$c_n,\ 2c_0c_n,\ 3c_0^2c_n,\ \ldots mc_0^{m-1}c_n.$$

Setzt man in die Gleichung $f(y,x)=0$ für y seinen Werth, ausgedrückt durch die Reihe, und ordnet nach Potenzen von x, so mufs der Coëfficient jeder Potenz von x, also auch von x^n, für sich verschwinden. Dieser besteht aber aus einem Theile, welcher p gewifs nicht im Nenner enthalten kann (indem er aus den in den A vorkommenden rationalen ganzen Zahlen und den c von c_0 bis c_{n-1} zusammengesetzt ist), und aus dem Theile

$$c_n(ma_0c_0^{m-1}+(m-1)a_1c_0^{m-2}\cdots+2a_{m-2}c_0+a_{m-1}).$$

Es mufs sich also auch aus diesem das p wegheben, *so dafs in den Nennern nur solche Primzahlen p vorkommen können, welche Theiler von dem*

Zähler des Ausdrucks

$$m a_0 c_0^{m-1} (m-1) a_1 c_0^{m-2} + \cdots + a_{m-1}$$

sind, der nach der Annahme nicht Null ist.

7.

Wir kommen zu dem Falle, wo $f(y,0) = 0$ *gleiche* Wurzeln hat. Es scheint mir auf einem Irrthum zu beruhen, wenn *Eisenstein* sagt, dafs die von *Gaufs* sogenannte *Determinante* von $f(y,0)$ nicht verschwinden darf, wenn eine Reihen-Entwickelung überhaupt möglich sein soll. Die Determinante dieser Function ist nach *Gaufs* (Commentat. Gotting. Classis Math. Tom. III. p. 114, „Demonstratio nova altera theor. omnem funct. algebr. etc. §. 6.") nichts anders, als das Product der m Werthe, welche

$$\frac{\partial f(y,0)}{\partial y}$$

annimmt, wenn man, nach Ausführung der Differentiation, für y der Reihe nach die m Wurzeln von $f(y,0) = 0$ setzt. Die Determinante verschwindet nur, und immer, wenn $f(y,0) = 0$ einige *gleiche* Wurzeln hat. Also müfste nach obiger Behauptung, wenn ich die betreffende Stelle nicht unrichtig deute, in gegenwärtigem Falle keine Reihen-Entwickelung einer Wurzel der Gleichung $f(y,x) = 0$ möglich sein. Man findet indessen, zunächst in speciellen Fällen, wenn auch die Determinante für $x = 0$ verschwindet, allerdings Reihen-Entwickelungen; wie es das Beispiel der Gleichung

$$f(y,x) = y^2 - 2(1+x)y + 1 + 2x + x^3 = 0$$

zeigt, deren Wurzeln

$$y = 1 + x + x\sqrt{(1-x)}$$

und

$$y = 1 + x - x\sqrt{(1-x)}$$

sich offenbar in Reihen entwickeln lassen, während die Determinante von

$$f(y,0) = y^2 - 2y + 1$$

verschwindet. Aufserdem sehe ich keinen Grund, aus welchem im vorliegenden Falle die Reihen-Entwickelung im allgemeinen unmöglich sein sollte, wenn gleich gewisse einfache Kunstgriffe angewendet werden müssen, um sie zu finden. Wie *Jacobi* in diesem Journal (Band 6. S. 273) bemerkt, hat *Laplace*, der in den „Mémoires de Mathématique et de Physique de l'Académie royale des sciences pour 1777 p. 99" zuerst die *Lagrange*'sche Umkehrungs-

formel bewies (Histoire, p. 54), an der Stelle wo er die Wurzel y einer Gleichung $f(y,x)=0$ in eine Reihe entwickeln will, wenn $f(y,0)=0$ gleiche Wurzeln hat (Mémoires p. 121), einen Irrthum begangen, den *Jacobi* am angezeigten Orte berichtigt.

Will man eine Wurzel der Gleichung $f(y,x)$ in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe entwickeln, so hat man y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. für $x=0$ zu suchen. Schreibt man zur Abkürzung f statt $f(y,x)$, und wendet das Zeichen ∂ für das *partielle*, das Zeichen d für das *vollständige* Differentiiren an, so wird

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Hat nun $f(y,0)=0$ mehrere gleiche Wurzeln c_0, so wird $\frac{\partial f}{\partial y}$ für $x=0$ verschwinden und $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ die Form $\frac{0}{0}$ bekommen; den wahren Werth des Bruchs wird man durch $(r-1)$malige Differentiation von Zähler und Nenner erhalten, wenn $f(y,0)=0$ eine Anzahl r gleicher Wurzeln hat. So entsteht eine Gleichung r^{ten} Grades für $\frac{dy}{dx}$, die auch die nothwendige Anzahl von Werthen dieser Gröfse, nämlich r, giebt. Ähnlich findet man $\frac{d^2y}{dx^2}$, u. s. w. für $x=0$. Hätte z. B. $f(y,0)=0$ zwei Wurzeln c_0, so wird

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\frac{\partial f}{\partial x}}{d\frac{\partial f}{\partial y}}$$

für $x=0$, d. h.

$$=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}},$$

so dafs $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ die Wurzel einer Gleichung *zweiten* Grades ist, nämlich von

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,$$

wenn man nach Ausführung sämmtlicher Differentiationen $x=0$ und $y=c_0$ setzt.

8.

Hat $f(y,0)=0$ *gleiche* Wurzeln, und läfst sich eine Wurzel der Gleichung $f(y,x)=0$ wieder in die Reihe

$$y_0 = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

entwickeln, so bleibt der Satz im wesentlichen bestehen; nämlich:

Nimmt man n grofs genug an, so wird

$$y-(c_0+c_1x\cdots+c_{n-1}x^{n-1})$$

für keine andere Wurzel der Gleichung $f(y,x)=0$ als für $y=y_0$ durch x^n theilbar sein, d. h., durch x^n getheilt, für $x=0$ noch einen endlichen Werth geben. Sollte man gerade ein solches n angenommen haben, dafs dieser endliche Werth für $x=0$ gleich Null ist, so wird ein noch gröfseres, geeignet gewähltes n diese letzte Eigenschaft der Differenz verhindern.

Wäre nämlich auch für die Wurzel y die Differenz

$$y_1-(c_0+c_1x\cdots+c_{n-1}x^{n-1}),$$

wie grofs man auch n annimmt, durch n theilbar, so müfste offenbar y_1 mit y_0 übereinstimmen.

Setzt man

$$y = (c_0+c_1x\cdots+c_{n-1}x^{n-1})+x^n\eta,$$

so wird man (§. 5.) aus der Gleichung für y eine ähnliche für η erhalten; nämlich:

$$B_0\eta^m+B_1\eta^{m-1}+\cdots+B_{m-1}\eta+B_m = 0,$$

in welcher die B ganze Functionen von x (mit ganzen rationalen Coëfficienten) sind, die wir uns *frei von einem gemeinsamen Factor* vorstellen und die sich *daher* für $x=0$ in rationale ganze Zahlen b_0, b_1, ... b_{m-1}, b_m verwandeln, *welche nicht sämmtlich Null sein können.* Von den m Wurzeln der vorstehenden Gleichung wird nur *eine* für $x=0$ einen endlichen Werth haben; nämlich die aus y_0 entstandene, η_0, deren Werth durch die Gleichung

$$y_0 = (c_0+c_1x\cdots+c_{n-1}x^{n-1})+x^n\eta_0$$

gegeben ist, so dafs

$$b_0z^m+b_1z^{m-1}\cdots+b_{m-1}z+b_m = 0$$

eine Gleichung ersten Grades sein mufs. Es verschwinden daher b_0, b_1, ... b_{m-2}, nicht aber b_{m-1} und b_m. Würde nämlich b_{m-1} gleich Null, so müfsten auch b_m, also alle b verschwinden; was nicht geschehen kann (S. oben). Wäre ferner b_{m-1} nicht Null, wohl aber b_m, so würde $z=-\frac{b_m}{b_{m-1}}=0$ sein, also

der Werth von η_0 für $x = 0$, d. h. c_n verschwinden. Es war aber n so angenommen, dafs dies nicht Statt findet.

Setzt man für η_0 den ihm zukommenden Werth

$$\eta_0 = c_n + c_{n+1}x + c_{n+2}x^2 + \cdots$$

in seine Gleichung vom m^{ten} Grade, so hat man ähnliche Betrachtungen anzustellen wie in (§. 6.), die aber hier einfacher sind. Man wird ohne Mühe sehen, dafs in dem Nenner eines hinlänglich entfernten Gliedes c_{n+s} (und zwar mufs s gröfser sein als der Grad von B_m) eine neue Primzahl p nur dann auftreten kann, wenn sie b_{m-1} theilt. Also ist auch in diesem Falle die Anzahl der Primzahlen beschränkt, welche die Nenner der Coëfficienten unserer Reihe, wenn sie auf ihre kleinste Benennung gebracht sind, theilen.

Wir schliefsen hieraus, dafs $\log x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\sin x$, e^x, u. s. w. *wirkliche Transcendenten* sind, d. h. nicht algebraische Functionen, ja nicht einmal Wurzeln algebraischer Gleichungen.

9.

Beweis der Sätze in §. 4.

Hülfssätze. Bezeichnet I irgend eine irrationale Zahl, so kann man dieselbe leicht als Wurzel einer Gleichung

$$I^m - A_1 I^{m-1} + A_2 I^{m-2} - \cdots \pm A_m = 0$$

darstellen, in welcher die Coëfficienten A rational sind. War I eine ganze Zahl (§. 2.), so kann man auch immer erreichen, dafs die A rational und ganz werden.

Der Beweis des ersten Theils dieses Satzes würde keine Schwierigkeiten haben, so dafs wir nur den Fall untersuchen wollen, wo I eine *ganze* Zahl bezeichnet. Das verlangte Resultat wird sich ergeben, wenn man I in die Theile auflöset, aus welchen es entstanden ist. Dazu theile man die irrationalen Zahlen in *Ordnungen*, auf die Weise, wie es *Abel* in seinem „Beweise der Unmöglichkeit, Gleichungen von höherem als dem 4ten Grade allgemein aufzulösen" (Journal, Bd. I. S. 67) gethan hat. Der Kürze wegen mag im Folgenden der Ausdruck „ganze *Function*" auch von *Zahlen* gebraucht werden; und zwar soll ein Aggregat, welches aus Zahlen *a, b, c,* etc. durch Addition, Subtraction und Multiplication entstanden ist, ohne dafs aufser *a, b, c,* etc. noch andere als rationale ganze Zahlen benutzt wurden, eine

ganze Function von a, b, c, etc. heifsen. So ist $2a+b$ eine *ganze* Function von a und b, nicht aber $a\sqrt{2}+b$. Zählen wir Wurzel-Ausziehungen, so nehmen wir solche, deren Exponent eine Primzahl ist, für *eine*, also z. B. eine 15[te] Wurzel, da $15=3.5$ ist, für eine *zweifache* Wurzel-Ausziehung.

Irrational erster Ordnung heifst dann eine ganze Function von rationalen ganzen Zahlen und einfachen Wurzeln; *Irrational zweiter Ordnung* eine ganze Function rationaler ganzer Zahlen, von Irrationalen erster Ordnung und einfachen Wurzeln aus Irrationalen erster Ordnung; u. s. w. *Die Irrationalen der verschiedenen Ordnungen sind ganze Zahlen;* eine Irrationale 0[ter] Ordnung ist eine rationale ganze Zahl. Wir werden uns dann I als Irrationale einer gewissen, der n^{ten} Ordnung, vorstellen können; und zwar seien die Wurzeln aus den Irrationalen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die in ihr vorkommen,

$$\sqrt[e_1]{r_1},\quad \sqrt[e_2]{r_2},\quad \sqrt[e_3]{r_3},\quad \text{etc.};$$

wo also die e Primzahlen die r Irrationalen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen. Potenzen von $\sqrt[e]{r}$ sind von keiner höheren Ordnung als diese Wurzeln selbst, und können unter der oben befindlichen Reihe von e_1^{ten}, e_2^{ten}, etc. Wurzeln vorkommen; dagegen braucht man in diese Reihe nur die ersten $e-1$ Potenzen aufzunehmen, da für ein ganzes rationales x,

$$(\sqrt[e]{r})^{ex+\alpha}$$

gleich der α^{ten} Potenz von $\sqrt[e]{r}$, multiplicirt mit einer ganzen Potenz von r, d. h. mit einer Irrationalen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Es läfst sich also I als ganze Function von $\sqrt[e_1]{r_1}$, $\sqrt[e_2]{r_2}$, etc. und ihrer resp. e_1-1, e_2-1, etc. ersten Potenzen, aufserdem aber von Gröfsen einer niedrigeren als der n^{ten} Ordnung darstellen. Setzt man jene e_1^{ten}, e_2^{ten}, etc. Wurzeln resp. gleich ϱ_1, ϱ_2, etc., so hat I die Form

$$I = \Sigma g_{s_1, s_2, \ldots} \varrho_1^{s_1} \varrho_2^{s_2} \ldots$$

wo die g Irrationalen höchstens von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, und die Summationen sich auf alle Werthe s_1, s_2, ..., von Null bis resp. e_1-1, e_2-1, etc. beziehen.

Es genügt also I einer Gleichung

$$I - \Sigma g_{s_1, s_2, \ldots} \varrho_1^{s_1} \varrho_2^{s_2} \ldots = 0,$$

deren Form mit der oben aufgestellten übereinstimmt, indem die höchste Potenz von I, (hier I selbst), nur mit 1 multiplicirt ist, die Summe aber eine

ganze Zahl vorstellt, welche allerdings noch nicht rational, sondern eine Irrationale n^{ter} Ordnung ist.

Multiplicirt man nun diese Gleichung ersten Grades mit den $e_1 e_2 \cdots - 1$ Factoren, die man erhält, wenn man in der Differenz

$$I - \Sigma g_{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots} \varrho_1^{\epsilon_1} \varrho_2^{\epsilon_2}$$

den ϱ alle möglichen Werthe giebt, deren solche Wurzelgröfsen fähig sind, so bekommt man für I eine Gleichung vom $e_1 e_2 \ldots^{ten}$ Grade, von der verlangten Form; mit Coëfficienten, die höchstens von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung sind. Wie man von der Gleichung ersten Grades auf die $e_1 e_2 \ldots^{ten}$ Grades kam, so wird man von dieser zu immer neuen Gleichungen von derselben Form, von einem immer höheren Grade, mit Coëfficienten immer niedrigerer Ordnung gelangen, bis man endlich zur 0ten Ordnung kommt.

Es genügt demnach jede ganze Zahl I einer Gleichung

$$I^m - A_1 I^{m-1} + \cdots \pm A_m = 0,$$

deren Coëfficienten A rational und ganz sind.

10.

Folgerungen. Sollte I nur in irrationaler Form aufgetreten, aber rational sein, so ist es eine *ganze* rationale Zahl, wenn es früher die Gestalt einer ganzen Zahl hatte. Genügt nämlich der Gleichung für I mit ganzen rationalen Coëfficienten eine rationale Zahl, so mufs dieselbe nach bekannten Sätzen *ganz* sein.

Die obige Gleichung für I ist nicht nothwendig irreductibel; man sieht aber, dafs jeder ihrer irreductibeln Factoren von derselben Form ist, wie sie selbst, und ganze Coëfficienten A hat. (Der Beweis folgt aus Disq. arithm. p. 37, §. 42.) Wir haben daher folgenden Satz:

Jede irrationale Zahl I genügt einer irreductibeln Gleichung

$$I^m - A_1 I^{m-1} + A_2 I^{m-2} - \cdots \pm A_m = 0.$$

Ist I ganz, so sind die A nicht nur rational, sondern auch ganz.

Da eine Gröfse I nur *einer* irreductibeln Gleichung genügen kann, so sind alle A bestimmt; also ist es auch A_m. *Norm einer Zahl I heifst die Gröfse A_m.* Die Norm einer jeden Zahl ist daher rational, *die Norm einer ganzen ganz.*

Die p^{te} Potenz der Norm einer ganzen Zahl ist durch die Norm der p^{ten} Potenz derselben theilbar. Setzt man nämlich $I = \sqrt[p]{K}$ in die Gleichung für I, so erhält man, indem man die p^{ten} Wurzeln wegschafft, eine

Gleichung für K, die mit K^m anfängt und mit $\pm A_m^p$ schliefst. Diese Gleichung ist entweder irreductibel, oder nicht; im ersten Falle ist sie identisch mit der irreductibeln Gleichung

$$K^n - B_1 K^{n-1} \cdots \pm B_n = 0,$$

welcher K als irrationale ganze Zahl genügt; im zweiten Falle ist sie wenigstens durch sie theilbar. Es ist also B_n (und das ist nach der Erklärung die Norm von K oder von I^p) ein Theiler von A_m^p der p^{ten} Potenz der Norm von I.

11.

Beweis des Satzes *b.* in §. 4. Den Arbeiten von *Abel* (Journal Bd. I. S. 65 et seq., Oeuvres complètes Tome II. „Sur la résolution algébrique des équations, p. 185 et seq.") entnehmen wir einige Resultate, deren Beweise in den angezeigten Stellen vollständig enthalten sind. Man kann auch die Arbeiten von *Malmstén* und *Luther* (Journal Bd. 34. und 37.) vergleichen. Es ist dort gezeigt, dafs jede irrationale Gröfse I auf eine Hauptform gebracht werden kann, in welcher sie als rationale Function gewisser Wurzelgröfsen $\sqrt[\mu]{y}$, $\sqrt[\mu_1]{y_1}$, etc. sich zeigt. Diese Function genügt dann immer derselben irreductibeln Gleichung, welche μ^{ten}, μ_1^{ten}, etc. Wurzeln man auch nehmen mag. (Oeuvres complètes, II. p. 199.) Man findet dort auch (p. 200) den Satz, dafs eine irreductibele Gleichung mit *einer* algebraischen Wurzel nur algebraische Wurzeln hat.

Bringt man daher eine Wurzel unserer irreductibeln Gleichung für I (§. 10.) auf die Hauptform und verändert die Wurzelgröfsen $\sqrt[\mu]{y}$, etc. auf alle mögliche Arten, so erhält man *alle* Wurzeln; so dafs das Product der auf diese Art gefundenen verschiedenen Ausdrücke die Norm von I wird.

Das „Théorème I." in den „Oeuvres complètes" von *Abel* p. 196 lehrt, dafs zwei algebraische Ausdrücke in der Hauptform, welche dieselben Wurzelgröfsen $\sqrt[\mu]{y}$, etc. enthalten, für *alle* Werthe, die man den Wurzelzeichen giebt, gleich sein müssen, wenn sie für *einen* der Werthe übereinstimmen. Ist nun eine ganze irrationale Zahl I das Product zweier anderen ganzen K und L, so bringe man diese auf die Hauptform. Es wird I nur die Wurzelgröfsen enthalten können, die in K und L vorkommen, obgleich einige der letztern sich durch die Multiplication wegheben, und daher in I fehlen können. Verändert man auf der Seite rechts der Gleichung

$$I = KL$$

die Wurzelzeichen $\sqrt[\mu]{y}$ etc. auf alle mögliche Art, so wird das Gleiche auch auf der Seite links Statt finden, während *verschiedenen* Veränderungen auf der Seite rechts *dieselben* auf der Seite links entsprechen können. Multiplicirt man die so entstehenden Gleichungen miteinander, so wird auf der Seite rechts das Product der Normen von K und L (nämlich aller Wurzeln der irreductibeln Gleichungen, denen K und L genügen) links die Norm von I oder eine Potenz derselben erhalten. Wir haben daher folgenden Satz:

Die Norm eines jeden Factors einer ganzen Zahl theilt die Norm der ganzen Zahl, oder eine Potenz derselben.

Soll nun eine Primzahl q eine ganze Zahl N oder eine Potenz derselben, z. B. die g^{te} theilen, so mufs die Norm von q, d. h. q selbst, die Norm von N^g zu irgend einer Potenz, also die Norm von N^g, mithin die g^{te} Potenz der Norm von N oder diese selbst theilen. *Eine ganze Zahl N und ihre Potenzen sind folglich nur durch die Primzahlen theilbar, welche die Norm von N theilen.* So ist also der Beweis des Satzes (4. *b.*) geliefert.

12.

Ein Hülfssatz. *Hat die Gleichung*

$$I^m + A_1 I^{m-1} + A_2 I^{m-2} \dots + A_m = 0,$$

in welcher die A rationale ganze Zahlen bezeichnen, eine irrationale Wurzel, so ist dieselbe ganz.

Beweis. Es sei Z der Zähler, N der Nenner von I, so dafs $\frac{Z}{N} = I$ ist. Man kann aber nicht annehmen, dafs Z und N keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Wäre nämlich δ ein solcher, so würden $\frac{Z}{\delta}$ und $\frac{N}{\delta}$ wieder einen Theiler haben können, und so könnte es in's Unendliche fortgehen. Es kann ja eine Zahl N unendlich viele Theiler haben; nur über die Normen derselben haben wir einen Satz aufgestellt. Wir werden zeigen, dafs wenn $\frac{Z}{N}$ der vorstehenden Gleichung genügt, es gleich $\frac{Z_1}{N_1}$, dieses gleich $\frac{Z_2}{N_2}$, etc. sein mufs, wo die Z und N ganze Zahlen bezeichnen, welche sich unbestimmt der Einheit nähern; woraus man dann schliefst, dafs der Bruch sich als ganze Zahl darstellen läfst.

Setzt man nämlich in die Gleichung für I seinen Werth, so findet sich

$$Z^m + N(A_1 Z^{m-1} + A_2 Z^{m-2} N + \dots + A_m N^{m-1}) = 0,$$

so dafs Z^m durch N theilbar ist. Macht man

$$Z^m = N Z_1^m,$$

so wird

$$l = \frac{Z}{N} = \frac{Z_1}{N^{\frac{m-1}{m}}},$$

wo Z_1 eine ganze irrationale Zahl bezeichnet und $N^{\frac{m-1}{m}}$ Das ist, was früher N_1 genannt wurde. So schreitet man nach und nach von dem Nenner N zu

$$\begin{aligned} N_1 &= N^{\frac{m-1}{m}}, \\ N_2 &= N_1^{\frac{m-1}{m}} = N^{\left(\frac{m-1}{m}\right)^2}, \\ N_3 &= N_2^{\frac{m-1}{m}} = N^{\left(\frac{m-1}{m}\right)^3} \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

fort und nähert sich also beliebig einem der Einheit gleichen Nenner.

13.

Beweis des Satzes *a.* in §. 4. Ist nun

$$\frac{Z}{N} = \frac{g}{h},$$

so genüge Z der irreductibeln Gleichung

$$(1.)\qquad Z^m + B_1 Z^{m-1} + B_2 Z^{m-2} + \cdots + B_m = 0$$

mit ganzen rationalen Coëfficienten, und N der folgenden:

$$(2.)\qquad N^r + C_1 N^{r-1} + C_2 N^{r-2} + \cdots + C_r = 0.$$

Setzt man in die erste Gleichung:

$$Z = \frac{g}{h} N,$$

so ergiebt sich

$$(3.)\qquad N^m + B_1 \frac{h}{g} N^{m-1} + B_2 \frac{h^2}{g^2} N^{m-2} + \cdots + B_m = 0;$$

was mit der Gleichung r^{ten} Grades für N übereinstimmen mufs. Denn (2.) ist irreductibel; eben so (3.) (welches aus der irreductibeln Gleichung (1.) entstand), weil jeder Factor, der (3.) theilt, offenbar auch Z zu der Wurzel einer Gleichung von niedrigerem Grade als dem m^{ten} machen würde. Die Gleichungen (2. und 3.) sind folglich identisch, also ist $m = r$ und

$$\begin{aligned} B_1 h &= g\, C_1, \\ B_2 h^2 &= g^2 C_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Da g und h keine gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind B_1, B_2, etc. resp. durch g, g^2, etc., ferner C_1, C_2, etc. resp. durch h, h^2, etc. theilbar. Macht man

$$B_1 = gA_1,$$
$$B_2 = g^2 A_2,$$
$$\dots\dots\dots,$$

so geben die Gleichungen für Z und N:

$$Z^m + gA_1 Z^{m-1} + g^2 A_2 Z^{m-2} + \cdots + g^m A_m = 0,$$
$$N^m + hA_1 Z^{m-1} + h^2 A_2 Z^{m-2} + \cdots + h^m A_m = 0.$$

Es genügen also $\frac{Z}{g}$ und $\frac{N}{h}$ einer und derselben Gleichung mit ganzen Coëfficienten A, nämlich:

$$\left(\frac{Z}{g}\right)^m + A_1\left(\frac{Z}{g}\right)^{m-1} + \cdots + A_m = 0,$$
$$\left(\frac{N}{h}\right)^m + A_2\left(\frac{N}{h}\right)^{m-1} + \cdots + A_m = 0;$$

sie sind ferner irrational, also nach (§. 12.) *ganz*, d. h. es ist Z durch g, und N durch h theilbar.

Bonn, im November 1852.

23.

Considérations générales sur les racines des nombres premiers.

(Par Mr. *Oltramare*, prof. des math. supér. à l'acad. des sciences de Genève.)

I.

§. 1.

Soit μ un nombre premier quelconque, et x un nombre compris dans la suite naturelle des nombres plus petits que μ. Élevons x successivement à toutes les puissances $0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots (\mu-2), (\mu-1), \mu, \mu+1, \ldots \mu+n-1, \ldots$ nous pouvons, en représentant par $r_{(n)}$ le reste de x^n divisé par μ, et en nous rappelant que par le théorème de *Fermat* nous avons

$$x^{\mu-1} \equiv 1 \text{ (mod. } \mu),$$

former les deux suites infinies

$$(1.)\quad x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots x^n,\ \ldots x^{\mu-2},\ x^{\mu-1},\ x^{\mu},\ x^{\mu+1}, \ldots x^{\mu+n-1}, \ldots,$$

$$(2.)\quad 1,\ r_{(1)},\ r_{(2)},\ r_{(3)},\ \ldots r_{(n)},\ \ldots r_{(\mu-2)},\ 1,\ r_{(1)},\ r_{(2)},\ \ldots r_{(n)},\ \ldots$$

En examinant la suites des restes (2.), on voit que cette suite est *périodique*, qu'après un nombre $\mu-1$ de restes on doit nécessairement retrouver l'unité, et qu'ensuite cette période de $\mu-1$ termes se répète indéfiniment. Si tous les nombres de la période

$$(3.)\quad 1,\ r_{(1)},\ r_{(2)},\ r_{(3)},\ \ldots r_{(n)},\ r_{(\mu-2)}$$

sont différents entr'eux, comme ils sont en nombre $\mu-1$ et tous plus petits que μ, ils doivent nécessairement représenter tous les nombres naturels depuis 1 à $\mu-1$.

Tout nombre x qui jouit de la propriété, qu'élevé à toutes les puissances $0, 1, 2, \ldots (\mu-2)$, il donne toujours des restes différents lorsqu'on divise ces puissances par μ, est désigné sous le nom de ***racine du premier ordre ou primitive*** de μ.

Si tous les termes de la période (3.) ne sont pas différents entr'eux, il est manifeste qu'en formant la suite de ces restes, le premier reste qu'on trouvera égal à un reste déjà obtenu, devra nécessairement être l'unité; et

comme d'ailleurs le reste qui répond à la puissance $\mu-1$ est l'unité, il faut que la période (3.) se trouve partagée en de nouvelles périodes dont le nombre des termes de chaque période est un sous-multiple de $\mu-1$; de sorte que si l'on représente par m le nombre des périodes qui entrent dans la période (3.), et par n le nombre des termes de chacune de ces nouvelles périodes, on aura

$$mn = \mu-1.$$

Cela posé, nous appellerons *racine du $m^{\text{ième}}$ ordre* ou *d'un indice m*, tout nombre x qui jouit de la propriété que, si on l'élève à toutes les puissances 0, 1, 2, 3, ... $\mu-2$, la suite des restes qu'on obtient en divisant ces puissances par μ, forme m périodes semblables de $\frac{\mu-1}{m}$ termes chacune.

§. 2.

Considérons les deux suites (1. et 2.), et supposons que x soit une racine de l'ordre m, la série (2.) se composera de m périodes semblables, de $\frac{\mu-1}{m}$ termes chacune.

Prenons un nombre quelconque y compris dans une de ces périodes, et proposons-nous de déterminer l'indice qui répond à ce nombre. Soit, pour fixer les idées, $y = r_{(p)}$ le nombre que nous avons choisi, nous pourrons former les deux suites

$$y^0,\quad y^1,\quad y^2,\quad y^3,\quad \ldots,$$
$$1,\quad r_{(p)},\quad r_{(2p)},\quad r_{(3p)},\quad \ldots$$

Cela posé, on reconnaît aisément, d'après la manière dont se forment les restes successifs des puissances de y:

1° Que si p est un diviseur de $\frac{\mu-1}{m}$, on arrivera au reste 1 après un nombre de termes égal à $\frac{\mu-1}{mp}$, puisque $r_{\left(\frac{\mu-1}{m}\right)} = 1$, et par suite que y sera une racine de l'ordre mp;

2° Que si q est le plus grand commun diviseur entre $\frac{\mu-1}{m}$ et p, on arrivera au reste 1 après un nombre de termes égal à $\frac{\mu-1}{mq}$, et par suite que y sera une racine dont le nombre des termes de la période sera $\frac{\mu-1}{qm}$, c'est-à-dire de l'ordre mq;

3° Que si p est premier avec $\frac{\mu-1}{m}$, on n'arrivera au reste 1 qu'après un nombre de termes égal à $\frac{\mu-1}{m}$, et par suite que y sera une racine dont le nombre des termes de la période sera $\frac{\mu-1}{m}$, c'est-à-dire de l'ordre m.

On peut conclure de là:

Théorème I. *Si la suite* (2.) *est formée au moyen d'une racines primitive x et qu'on écrive les deux suites*

$$0,\ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ \dots\ p,\ \ \dots\ (\mu-2),$$
$$1,\ r_{(1)},\ r_{(2)},\ r_{(3)},\ \dots\ r_{(p)},\ \dots\ r_{(\mu-2)},$$

$r_{(p)}$ sera une racine du nombre premier μ d'un ordre indiqué par le plus grand commun diviseur entre p et $\mu-1$.

On peut déduire de ce théorème, en admettant que tout nombre premier a une racine primitive, les conséquences suivantes:

1° Qu'un nombre premier a autant de racines de l'ordre m et plus petites que μ, qu'il y a de nombres entiers premiers et inférieurs à $\frac{\mu-1}{m}$;

2° Que si l'on connaissoit une racine primitive d'un nombre premier, on les connaîtrait toutes, en élévant cette racine à toutes les puissances qui sont des nombres premiers avec $\mu-1$ et en divisant ces puissances par μ;

3° Que tout nombre premier aura des racines des ordres marqués par les facteurs de $\mu-1$, et seulement des racines de ces ordres là;

4° Que toute puissance m d'une racine de l'ordre p est une racine de l'ordre mp, si le nombre μ est de la forme $mpk+1$, ou une racine de l'ordre donné par le plus grand commun diviseur entre $\mu-1$ et mp, si le nombre premier est d'une autre forme.

§. 3.

Théorème II. *Si μ est un nombre premier absolu, et a une racine de ce nombre de l'ordre n, la congruence*

$$x \equiv \sqrt[m]{a}\ (\text{mod.}\ \mu)$$

1° *Admettra une solution, et rien qu'une, si les deux nombres $\mu-1$ et m sont premiers entr'eux; et cette solution sera une racine de l'ordre n également.*

2° *Elle n'admettra aucune solution si les deux nombres $\mu-1$ et m ont un plus grand commun diviseur qui n'entre pas dans n;*

3° *Elle admettra autant de solutions que le plus grand commun diviseur entre $\mu-1$ et m contient d'unités, si ce plus grand commun diviseur divise aussi exactement n; de plus ces différentes solutions seront des racines de μ, soit de l'ordre n, soit d'un ordre sous-multiple de n.*

Cette proposition très connue, n'est que l'énoncé de la réciproque de la $4^{\text{ième}}$ conséquence du paragraphe précédent.

Si nous considérons l'expression

$$x \equiv \sqrt[m]{1} \pmod{\mu},$$

dont les m valeurs sont données par

$$R_k \equiv \cos\frac{2k\omega}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\omega}{m} \pmod{\mu},$$

lorsqu'on fait dans cette formule k successivement égal à $0, 1, 2 \ldots (m-1)$, il résultera du théorème précédent. en remarquant que 1 est évidemment de l'ordre $\mu-1$:

1° Que R_k sera irrationnelle pour toutes les valeurs de k différentes de 0, si m et $\mu-1$ sont premiers entr'eux;

2° Que R_k sera rationnelle pour un nombre de valeurs de k égal au nombre qui exprime le plus grand commun diviseur entre $\mu-1$ et m, et irrationnelle pour les autres.

§. 4.

Si nous supposons $m=3$, les différentes valeurs de R seront:

$$R \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$R' \equiv -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu},$$
$$R'' \equiv -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu}.$$

Par conséquent, si $\mu=6n+1$, $\mu-1$ et m seront premiers entr'eux, et les valeurs de R' et R'' devront être irrationnelles.

On peut en conclure que: $\sqrt{-3}$ *est rationnelle pour tout nombre premier* μ *de la forme* $6n+1$, *et irrationnelle pour tout nombre premier* μ *de la forme* $6n-1$.

En supposant $m=3^{p-1}$, on démontrera de même que:

L'expression $\sqrt[3^{p-1}]{(-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})}$ *est rationnelle pour toute valeur d'un nombre premier* μ *de la forme* $2.3^p n+1$, *et irrationnelle pour tout nombre premier d'une autre forme.*

§. 5.

Si nous supposons $m=5$, les différentes valeurs de R seront

$$R \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$R' \equiv -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(-10-2\sqrt{5})} \pmod{\mu},$$
$$R'' \equiv -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(-10-2\sqrt{5})} \pmod{\mu},$$
$$R''' \equiv -\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(-10+2\sqrt{5})} \pmod{\mu},$$
$$R^{\text{IV.}} \equiv -\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}-\tfrac{1}{4}\sqrt{(-10+2\sqrt{5})} \pmod{\mu}.$$

Si $\mu = 10n + 1$, le plus grand commun diviseur entre $\mu - 1$ et m, sera 5. et toutes les valeurs de R seront rationnelles. Or, puisque (comme nous le reconnaîtrons plus loin §. 13.), $\sqrt{5}$ est rationnelle pour toute valeur de μ de la forme $10n \pm 1$, l'expression $\sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}$ doit l'être pour toute valeur de μ de la forme $10n + 1$.

Si $\mu = 10n - 1$, $\mu - 1$ et m sont deux nombres premiers entr'eux. Comme d'ailleurs $\sqrt{5}$ est rationnelle, l'expression $\sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}$ doit être irrationnelle.

Si $\mu = 10n \pm 3$, il est aisé de voir que $\sqrt{5}$ et $\sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}$ sont irrationnelles.

On peut conclure de là que:

L'expression $\sqrt{(-10 \pm 2\sqrt{5})}$ est rationnelle pour toute valeur de μ de la forme $10n + 1$, et irrationelle pour tout nombre premier d'une autre forme.

En supposant $m = 5^{p-1}$, on démontrera de même que:

L'expression $\sqrt[5^{p-1}]{[-\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \sqrt{(-10 \mp 2\sqrt{5})}]}$ est rationnelle pour toute valeur d'un nombre premier μ de la forme $2.5^p n + 1$, et irrationnelle pour tout nombre premier d'une autre forme.

§. 6.

Enfin, généralement, on peut dire que:

En représentant par α un nombre premier, et par R_k la valeur de l'expression $\cos\frac{2k\omega}{\alpha} + \sin\frac{2k\omega}{\alpha}\sqrt{-1}$, dans laquelle k peut prendre toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots \alpha - 1$, on verra que l'expression

$$\sqrt[\alpha^{p-1}]{R_k}$$

sera rationnelle pour tout nombre premier de la forme $2\alpha^p n + 1$, et irrationnelle pour tout nombre premier d'une autre forme.

§. 7.

On déduit aisément du théorème II. et de la 4ième conséquence du (§. 2.) le théorème suivant.

Théorème III. *Si l'on admet que toutes les racines de l'ordre m d'un nombre premier μ, soient données par l'ensemble des solutions d'une congruence*

$$X_{(m)} = \varphi(x) \equiv 0 \pmod{\mu},$$

la congruence, propre à donner les racines de l'ordre mn, et rien

que les racines de cet ordre, s'obtiendra en changeant dans cette congruence x en $\sqrt[n]{x}$.

Réciproquement, si l'on connaît la congruence qui donne les racines de l'ordre *mn*, et que nous en voulions déduire celle qui donne les racines de l'ordre *m*, il faudra remplacer x par x^n. Mais ici on devra remarquer que la nouvelle congruence contiendra non-seulement les racines de l'ordre *mn*, mais aussi les racines de tous les ordres qu'on obtient en multipliant *m* par tous les diviseurs de *n*. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant.

§. 8.

Théorème IV. *Si la congruence*

$$X_{(mn)} = \varphi(x) \equiv 0 \pmod{\mu}$$

donne pour solutions toutes les racines de l'ordre mn, et si l'on désigne par

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\ n$$

tous les diviseurs de n, différents de l'unité, et par

$$X_{(mn_1)} \equiv 0 \pmod{\mu},\quad X_{(mn_2)} \equiv 0 \pmod{\mu},\quad \ldots\quad X_{(mn)} \equiv 0 \pmod{\mu}$$

les congruences propres à donner les racines des différents ordres mn_1, mn_2, ... m: la congruence qui donnera les racines de l'ordre m, et rien que les racines de cet ordre, sera

$$X_{(m)} = \frac{\varphi(x^n)}{X_{(mn_1)} \cdot X_{(mn_2)} \ldots X_{(mn)}} \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

La détermination des congruences, propres à donner les racines d'un nombre premier μ de tel ordre qu'on voudra, ne saurait actuellement présenter de difficultés.

§. 9.

Si nous considérons le nombre 1, il est évident qu'en l'élevant successivement aux différentes puissances 1, 2, 3, ... $\mu-2$, il donnera naissance à une période d'un seul terme, et par suite ce nombre est une racine de l'ordre $\mu-1$. Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que ce nombre est la seule racine de cet ordre, de sorte que la congruence

$$X_{(\mu-1)} = x-1 \equiv 0 \pmod{\mu}$$

est la congruence propre à donner toutes les racines, et rien que les racines de l'ordre $\mu-1$.

Si actuellement nous représentons par $2^m\alpha^s h+1$ le nombre premier μ; m et s étant des nombres entiers, α un nombre premier, et h un nombre impair quelconque, nous aurons en vertu du théorème précédent:

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)} = \frac{x^2-1}{X_{(\mu-1)}} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^2}\right)} = \frac{x^{2^2}-1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}X_{(\mu-1)}} = \frac{x^{2^2}-1}{(x+1)(x-1)} = x^2+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^3}\right)} = \frac{x^{2^3}-1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2^2}\right)}X_{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}X_{(\mu-1)}} = \frac{x^{2^3}-1}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = x^{2^2}+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

. . . .

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m}\right)} = \frac{x^{2^m}-1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2^{m-1}}\right)}X_{\left(\frac{\mu-1}{2^{m-2}}\right)}\dots X_{(\mu-1)}} = \frac{x^{2^m}-1}{(x^{2^{m-1}}+1)(x^{2^{m-2}}+1)\dots(x-1)}$$
$$= x^{2^{m-1}}+1 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Remarquons que la valeur de $X_{\left(\frac{\mu-1}{2^2}\right)}$ pourrait être déduite de la valeur de

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)} = x+1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

en mettant simplement x^2 à la place de x. Il en est de même des valeurs de

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^3}\right)},\quad X_{\left(\frac{\mu-1}{2^4}\right)},\quad \dots\quad X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m}\right)}.$$

En faisant usage de cette remarque, nous trouverons, en continuant l'application de notre théorème, la suite des congruences

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha}\right)} = \frac{x^{2^{m-1}\alpha}+1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m}\right)}} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha^2}\right)} = \frac{x^{2^{m-1}\alpha^2}+1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha}\right)}X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m}\right)}} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha^3}\right)} = \frac{x^{2^{m-1}\alpha^3}+1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha^2}\right)}X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha}\right)}X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m}\right)}} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

. . . .

$$X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha^s}\right)} = \frac{x^{2^{m-1}\alpha^s}+1}{X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha^{s-1}}\right)}X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m\alpha^{s-2}}\right)}\dots X_{\left(\frac{\mu-1}{2^m}\right)}} \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Et en continuant ainsi pour tous les facteurs de h, on arrivera à déterminer toutes les congruences qui donnent les racines de tel ordre qu'on voudra.

§. 10.

Si nous appelons ***racines impaires,*** les racines d'un nombre premier μ dont l'ordre est un nombre impair, et ***racines paires*** celles dont l'ordre est un nombre pair, nous pourrons dire:

Théorème V. ***Les racines impaires d'un nombre premier*** μ ***sont les racines de la congruence***

$$x^{\frac{1}{2}(\mu-1)}+1 \equiv 0 \text{ (mod. } \mu),$$

et les racines paires celles de la congruence

$$x^{\frac{1}{2}(\mu-1)}-1 \equiv 0 \text{ (mod. } \mu).$$

En supposant en effet $\mu = 2^m h$ (h étant un nombre impair), nous aurons en vertu du paragraphe précédent que les racines de l'ordre h seront les solutions de la congruence

$$x^{2^{m-1}}+1 \equiv 0 \text{ (mod. } \mu).$$

Si, dans cette congruence, à la place de x, nous mettons x^h, nous aurons en vertu du théorème IV, une congruence qui contiendra les racines de tous les ordres qu'on obtient en multipliant 1 par tous les diviseurs de h; ou en d'autres termes, toutes les racines impaires. Cette nouvelle congruence est

$$x^{2^{m-1}h}+1 = x^{\frac{1}{2}(\mu-1)}+1 \equiv 0 \text{ (mod. } \mu).$$

Comme en vertu du Théorème de *Fermat* on sait que la congruence

$$x^{\mu-1}-1 = (x^{\frac{1}{2}(\mu-1)}+1)(x^{\frac{1}{2}(\mu-1)}-1) \equiv 0 \text{ (mod. } \mu)$$

contient les racines des différents ordres de μ, il faut que la congruence

$$x^{\frac{1}{2}(\mu-1)}-1 \equiv 0 \text{ (mod. } \mu)$$

contienne toutes les racines d'un ordre pair.

On reconnaîtra semblablement que toutes les racines d'un ordre $2^q h$ (h étant un nombre impair) sont données par la congruence

$$x^{\frac{\mu-1}{2^q}}+1 \equiv 0 \text{ (mod. } \mu).$$

§. 11.

Si l'on examine avec soin de quelle manière en vertu du théorème (IV.) on peut déduire de la congruence

$$x_{(2m)} \equiv 0 \pmod{\mu}$$

celle-ci:

$$x_{(m)} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

on en conclura sur les racines paires et impaires le théorème suivant.

Théorème VI. *μ étant un nombre premier de la forme $2^m h + 1$, et x et z deux nombres entiers qui satisfont à la congruence*

$$xz + 1 \equiv 0 \pmod{\mu}:$$

1° *Si l'un des deux nombres x ou z est une racine de μ d'un ordre marqué par $2^m k$, l'autre sera une racine paire ou impaire, mais seulement d'un ordre marqué par $2^{m-1} k$;*

2° *Si l'un des deux nombres x ou z est une racine de μ d'un ordre pair ou impair marqué par $2^{m-h'} k$ $(h' > 1)$, l'autre sera également une racine paire ou impaire du même ordre.*

Faisons remarquer que si μ est de la forme $4n+3$, auquel cas $m = 1$, en résolvant la congruence

$$xz + 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

on obtient pour la valeur de l'un des deux nombres une racine impaire, et pour l'autre une racine paire d'un ordre double.

§. 12.

Si nous appelons *racines conjuguées* deux racines dont le produit est congru à l'unité, et si nous désignons sous le nom de *racines complémentaires*, deux racines dont la somme est congrue à zéro, nous pourrons établir les théorèmes suivants.

Théorème VII. *Les racines conjuguées sont toujours du même ordre, quel que soit le nombre premier μ auquel elles appartiennent.*

En effet, en posant

$$xy - 1 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

et en désignant par a une racine primitive de μ, les valeurs $x \equiv a^n$, $y = a^{\mu-n-1}$ seront des solutions de cette congruence. Or les ordres des racines x et y seront égaux aux plus grands communs diviseurs entre $\mu-1$ et n, $\mu-1$ et $\mu-n-1$, et comme il est évident que ces plus grands communs diviseurs sont égaux, ces racines sont du même ordre.

Théorème VIII. *Si μ est un nombre premier de la forme $4m+1$, les racines complémentaires seront toutes deux impaires ou toutes deux paires. Si elles sont impaires, elles sont du même ordre; si elles sont paires, elles peuvent être, soit du même ordre, soit d'un ordre différent d'un multiple 2^p.*

Si μ est un nombre premier de la forme $4m+3$, les racines complémentaires seront, l'une d'un ordre impair, l'autre d'un ordre pair, d'un degré double de celui de la première.

La démonstration de ce Théorème est trop simple pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter; il est une conséquence des théorèmes (VI. et VII.).

Théorème IX. *Le nombre 2 est racine impaire de tout nombre premier μ de la forme $8n\pm3$, et racine paire de tout nombre premier μ de la forme $8n\pm1$.*

Ce théorème est le même que celui qu'à démontré *Legendre* dans sa théorie des nombres (parag. 148).

§. 13.

Problème. *Déterminer si le nombre premier α est une racine paire, ou une racine impaire du nombre premier μ.*

Si l'on connaissait les racines paires et impaires d'un nombre premier α, on pourrait aisément déterminer, si α est racine paire ou impaire d'un autre nombre premier μ; car en divisant μ par α, et en désignant par r le reste de la division, on aura par la loi de réciprocité de *Legendre* que:

Si μ et α ne sont pas tous les deux de la forme $4n+3$: si r est racine paire ou impaire de α, α lui-même sera une racine paire ou impaire de μ.

Si μ et α sont tous deux de la forme $4n+3$: si r est racine paire ou impaire de α, α lui-même sera, au contraire, racine impaire ou paire de μ.

Si nous supposons $\alpha=3$: 1 sera racine paire, et 2 racine impaire; par conséquent, si μ est des deux formes

$3n+1$	et	$4n+1$,	3 est racine paire,
$3n+2$	et	$4n+1$,	3 est racine impaire,
$3n+1$	et	$4n+3$,	3 est racine impaire,
$3n+2$	et	$4n+3$,	3 est racine paire.

Il résulte de là que:

Théorème X. *a) Le nombre* 3 *sera racine paire de tout nombre premier* μ *de la forme* $12n \pm 1$, *et racine impaire de tout nombre premier de la forme* $12n \pm 5$.

Si nous faisons $\alpha = 5$: 1 et 4 seront racines paires, et 2 et 3 racines impaires. Le même raisonnement nous conduira à admettre que

b) Le nombre 5 *sera racine paire de tout nombre premier* μ *de la forme* $10n \pm 1$, *et racine impaire de tout nombre premier de la forme* $10n \pm 3$.

Si nous faisons successivement $\alpha = 7$, $\alpha = 11$, $\alpha = 13$, etc., nous trouverons, en suivant la même marche que

c) Le nombre 7 *sera racine paire de tout nombre premier de la forme* $28n \pm 1$, *ou* $28n \pm 3$, *ou* $28n \pm 9$; *et racine impaire de tout nombre premier de la forme* $28n \pm 5$, *ou* $28n \pm 11$, *ou* $28n \pm 13$.

d) Le nombre 11 *sera racine paire de tout nombre premier de la forme* $44n \pm 1$, *ou* $44n \pm 5$, *ou* $44n \pm 7$, *ou* $44n \pm 9$; *ou* $44n \pm 19$, *et racine impaire de tout nombre premier de la forme* $44n \pm 3$, *ou* $44n \pm 13$, *ou* $44n \pm 15$, *ou* $44n \pm 17$, *ou* $44n \pm 21$.

Et généralement: *Le nombre premier* μ *est racine paire de tout nombre premier* μ *dont les formes sont données par une certaine suite* $4\alpha n \pm a$, *ou* $4\alpha n \pm b$, *ou etc., et racine impaire de tout nombre premier* μ *dont les formes sont données par une suite* $4\alpha n \pm a'$, *ou* $4\alpha n \pm b'$, *ou etc.*

Parmi les formes de μ qui donnent α pour racine paire, on trouvera constamment la forme $2\alpha n \pm k^2$, et il est facile de faire voir que cela arrivera constamment. Si, en effet, on suppose $\mu = 4\alpha n + k^2$, et qu'on applique la loi de réciprocité, on trouve que α est racine paire ou impaire de μ, selon que k^2 est racine paire ou impaire de α: par suite α est racine paire de μ, car μ est de la forme $4n + 1$.

Si de plus on remarque que les nombres premiers qui répondent aux deux formes $4\alpha n \pm k^2$, ont à la fois α pour racine paire ou impaire, on pourra énoncer le théorème suivant.

Théorème XI. *Si* μ *est un nombre premier, tel qu'en y ajoutant ou retranchant* k^2, *le résultat est divisible par* 4: *tout nombre premier différent de* 2, *qui divise l'expression* $\mu \pm k^2$, *est une racine paire du nombre premier* μ.

§. 14.

Nous pouvons, comme conséquence des théorèmes prouvés dans le paragraphe précédent, établir le théorème suivant.

Théorème XII. *μ et α étant deux nombres premiers, et qu'en divisant μ par 4α, on obtient un reste r positif ou négatif, tel que $2\alpha - r$ soit également un nombre premier ν:*

1° Si α est de la forme $4n+1$, α sera une racine paire ou impaire de μ, selon qu'il sera lui-même une racine paire ou impaire de ν.

2° Si α est de la forme $4n+3$, α sera une racine paire ou impaire de μ, selon qu'il sera lui-même une racine impaire ou paire de ν.

II.

§. 1.

Soit μ un nombre premier quelconque, et proposons-nous de résoudre la congruence

$$y^3 + Py^2 + Qy + R \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Si l'on fait disparaître le second terme de cette congruence, en posant

$$y \equiv x - \tfrac{1}{3}P \pmod{\mu},$$

on pourra, en désignant par p et q des nombres entiers quelconques, la mettre sous la forme

$$(1.) \quad x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Si l'on pose, pour abréger:

$$A \equiv \sqrt[3]{[-q + \sqrt{(q^2 + p^3)}]} \pmod{\mu},$$

les valeurs de x qui satisfont à la congruence (1.), seront données par les expressions analytiques:

$$(2.) \quad x' \equiv A - \frac{p}{A} \pmod{\mu},$$

$$(3.) \quad x'' \equiv -\tfrac{1}{2}\left(A - \frac{p}{A}\right) - \tfrac{1}{2}\left(A + \frac{p}{A}\right)\sqrt{-3} \pmod{\mu},$$

$$(4.) \quad x''' \equiv -\tfrac{1}{2}\left(A - \frac{p}{A}\right) - \tfrac{1}{2}\left(A + \frac{p}{A}\right)\sqrt{-3} \pmod{\mu}.$$

Cela posé, nous allons examiner quelles sont les congruences pour lesquelles ces expressions ont une valeur rationnelle ou irrationnelle, et rechercher, sous quelles formes il convient de les mettre pour en calculer les valeurs, dans le cas de la première de ces alternatives.

Nous distinguerons ici trois cas; selon que la quantité q^2+p^3 qui entre dans l'expression de A, satisfait à l'une ou à l'autre des trois congruences suivantes:

$$q^2+p^3 \equiv 0 \pmod{\mu},$$
$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu}.$$

§. 2.

Théorème I. *Si les nombres p et q qui entrent dans la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

sont tels que l'on ait:

$$(1.) \quad q^2+p^3 \equiv 0 \pmod{\mu},$$

la congruence proposée admettra trois racines rationnelles, dont deux seront égales entr'elles.

Cette proposition est évidente si l'on remarque que l'on a identiquement, en vertu de la congruence (1.):

$$x^3+3px+2q \equiv \left(x+\frac{q}{p}\right)\left(x+\frac{q}{p}\right)\left(x-\frac{2q}{p}\right) \equiv 0 \pmod{\mu},$$

d'où il résulte

$$x' \equiv +2\frac{q}{p} \pmod{\mu},$$
$$x'' \equiv -\frac{q}{p} \pmod{\mu},$$
$$x''' \equiv -\frac{q}{p} \pmod{\mu}.$$

Ces résultats pourraient d'ailleurs se déduire des expressions analytiques (2, 3 et 4.), en tenant compte de la congruence (1.) de ce paragraphe.

§. 3.

Théorème II. *Si μ est un nombre premier de la forme* $6n-1$, *et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait:*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

la congruence proposée

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

n'admettra qu'une seule racine rationnelle, donnée par la formule

$$x \equiv -\frac{2q}{p+2M} \pmod{\mu};$$

M représentant la partie du développement de l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n},$$

qui ne contient pas $\sqrt{(q^2+p^3)}$ en facteur, c'est à dire:

$$\tfrac{1}{2}\{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n}+[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n}\}.$$

Puisqu'on a la congruence

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

on pourra toujours trouver une valeur de s, telle que

$$s \equiv \sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

et la valeur de x' donnée par la congruence (2. §. 1.), sera

$$x' \equiv \sqrt[3]{(s-q)}-\frac{p}{\sqrt[3]{(s-q)}} \pmod{\mu}.$$

Si maintenant on remarque que μ est de la forme $6n-1$: $\mu-1$ sera premier avec 3, et en vertu d'un théorème connu, l'expression $\sqrt[3]{(s-q)}$ sera rationnelle; par suite la valeur de x' le sera, et la congruence proposée admettra cette valeur comme racine rationnelle.

Quant aux deux autres valeurs x'' et x''' de x, il est facile de voir qu'elles sont irrationnelles; car elles se composent d'une première partie $-\frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{(s-q)}-\frac{p}{\sqrt[3]{(s-q)}}\right]$ qui est rationnelle; plus d'une seconde partie, dont l'un des facteurs $\sqrt{-3}$ est toujours irrationnel (vu la forme du nombre premier μ) et dont l'autre $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(s-q)}+\frac{p}{\sqrt[3]{(s-q)}}$ est rationnel.

Pour exprimer la valeur de x' en fonction rationnelle des coëfficients de la congruence proposée et du nombre premier μ: remarquons qu'en résolvant la congruence (2. §. 1.) par rapport à A, on obtient:

$$2A \equiv 2\sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv x'\pm\sqrt{(x'^2+4p)} \pmod{\mu}.$$

Élevant à la puissance $\mu+1=6n$ les deux membres de cette congruence, en



remarquant que:

$$x'^{\mu} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$(x'^2+4p)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

et en réjetant les multiples de μ, on trouve:

$$4[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv [x' \pm \sqrt{(x'^2+4p)}]^2 \equiv 2x'^2+4p \pm 2x'\sqrt{(x'^2+4p)} \pmod{\mu},$$

qu'on peut écrire:

$$x'^2+2p \pm x'\sqrt{(x'^2+4p)} \equiv 2[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \pmod{\mu}.$$

Changeant le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$, ce qui ne change pas la valeur de x', on a:

$$x'^2+2p \mp x'\sqrt{(x'^2+4p)} \equiv 2[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \pmod{\mu}.$$

Additionnant ces deux congruences, on en tire:

$$x'^2+2p \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} + [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \pmod{\mu}.$$

En posant, pour abréger,

$$M \equiv \tfrac{1}{2}\{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} + [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n}\} \pmod{\mu},$$

nous aurons

$$x'^2 \equiv 2(M-p) \pmod{\mu},$$

cette valeur de x'^2, mise dans la congruence proposée, donne

$$x' \equiv -\frac{2q}{p+2M} \pmod{\mu}.$$

§. 4.

Théorème III. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n+1$, et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait:*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

la congruence proposée

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

admettra trois racines rationnelles, ou n'en admettra aucune, selon que la congruence

$$(1.) \quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv 1 \pmod{\mu}$$

sera satisfaite, ou ne le sera pas.

Si la quantité $-q+\sqrt{(q^2+p^3)}$ est une racine du nombre premier μ, d'un ordre dont l'indice soit multiple de 3, cette valeur satisfera à la congruence (1.); comme le démontre le théorème de *Fermat*, et la valeur,

$$(2.) \quad A \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \pmod{\mu},$$

sera, en vertu d'un théorème connu, une quantité rationnelle qui admettra trois valeurs. En désignant ces trois valeurs par A', A'' et A''', nous aurons, comme racines de la congruence proposée:

$$(3.)\quad \begin{cases} x' \equiv A' - \frac{p}{A'} \pmod{\mu}, \\ x'' \equiv A'' - \frac{p}{A''} \pmod{\mu}, \\ x''' \equiv A''' - \frac{p}{A'''} \pmod{\mu}, \end{cases}$$

ou bien, en désignant par A une quelconque de ces trois valeurs, les expressions de x', x'', x''', données dans le (§. 1.); car $\sqrt{-3}$ est, par la forme du nombre premier μ, une quantité rationnelle.

Réciproquement, si p et q sont tels que la congruence (1.) soit satisfaite, la congruence proposée admettra trois solutions.

En effet, on déduit des congruences (1. et 2.):

$$A^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{\mu}:$$

congruence qui montre que A est une quantité rationnelle, et par suite que les valeurs de x', x'' et x''' données (§. 1.) sont rationnelles; car $\sqrt{-3}$ l'est également.

Si la quantité $-q+\sqrt{(q^2+p^3)}$ est une racine du nombre premier μ, d'un ordre dont l'indiçe soit premier avec 3: cette valeur ne satisfera point à la congruence (1.). De plus, les trois racines x', x'' et x''' seront irrationnelles; comme nous allons le reconnaître. En effet, la quantité $-q+\sqrt{(q^2+p^3)}$ étant une racine du nombre premier μ dont l'indice est premier avec 3, la valeur de

$$A \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \pmod{\mu}$$

sera irrationnelle, conformément à un théorème connu; et par suite la valeur

$$x' \equiv A - \frac{p}{A} \pmod{\mu},$$

ne saurait devenir rationnelle que dans le cas où les parties irrationnelles de A et de $\frac{p}{A}$ seraient égales entr'elles et où l'on aurait:

$$A \equiv y + \sqrt[3]{z} \pmod{\mu},$$
$$\frac{p}{A} \equiv y' + \sqrt[3]{z} \pmod{\mu};$$

y, y' et z représentant des quantités rationnelles.

Il résulte de ces deux congruences:

$$p-yy' \equiv (y+y')\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2} \pmod{\mu}.$$

Multipliant cette congruence par $\sqrt[3]{z}$, on trouve

$$-z \equiv -(p-yy')\sqrt[3]{z}+(y+y')\sqrt[3]{z^2} \pmod{\mu}.$$

Éliminant $\sqrt[3]{z^2}$ entre ces deux dernières congruences, on obtient:

$$(a.) \quad \sqrt[3]{z} \equiv \frac{z+(y+y')(p-yy')}{p-yy'(y+y')^2} \pmod{\mu}.$$

Or cette dernière congruence est absurde, car elle donne pour $\sqrt[3]{z}$ une valeur rationnelle: la valeur de x' est donc irrationnelle.

On ne saurait objecter que le numérateur et le dénominateur peuvent être congru à zéro dans la congruence $(a.)$, car alors il en résulterait

$$y+y' \equiv \sqrt[3]{z} \pmod{\mu};$$

ce qu'on ne saurait admettre.

Quant aux deux autres valeurs de x, x'' et x''', il est facile de démontrer qu'elles sont également irrationnelles.

En effet, en posant pour abréger $z \equiv -q+\sqrt{(q^2+p^3)}$, il est facile de voir que l'expression $A-\frac{p}{A}$ peut se mettre sous la forme $\sqrt[3]{z}+k\sqrt[3]{z^2}$, k étant un coëfficient rationnel, et pour que x'' soit rationnelle, il faut que l'on ait simultanément:

$$(b.) \quad \begin{cases} A-\frac{p}{A} \equiv \sqrt[3]{z}+k\sqrt[3]{z^2} \pmod{\mu}, \\ \sqrt{-3}\left(A+\frac{p}{A}\right) \equiv y+\sqrt[3]{z}+k\sqrt[3]{z^2} \pmod{\mu}; \end{cases}$$

y étant une quantité rationnelle.

Élevant les deux membres de ces congruences au carré, et éliminant A, on obtient:

$$(2ky+4)\sqrt[3]{z^2}+(4k^2z+2y)\sqrt[3]{z}+12p+8kz+y^2 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Multipliant cette congruence par $\sqrt[3]{z}$, on a:

$$(4k^2z+2y)\sqrt[3]{z^2}+(12p+8kz+y^2)\sqrt[3]{z}+(2ky+4)z \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Éliminant $\sqrt[3]{z^2}$ entre ces deux congruences, on trouve:

$$\sqrt[3]{z} \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv \frac{8z-24k^2pz-16k^3z^2-12py-y^3}{8k^4z^2-12kpy-ky^3-24p-16kz} \pmod{\mu}.$$

Or cette dernière congruence est impossible, puisqu'elle donne pour $\sqrt[3]{z}$ une valeur rationnelle; la valeur de x'' est donc irrationnelle.

Il ne saurait arriver que le numérateur et le dénominateur fussent congrus à zéro, car alors on aurait:

$$\sqrt[3]{z} \equiv \frac{2k^2z+y}{ky+2} \pmod{\mu};$$

ce qu'on ne saurait admettre, à moins que le numérateur et le dénominateur ne fussent encore congrus à zéro, auquel cas nous aurions

$$\sqrt[3]{z} \equiv \frac{1}{k} \pmod{\mu};$$

ce qu'on ne peut admettre.

Le même raisonnement pourrait s'appliquer à x''' seulement. Au lieu des congruences (*b.*), il faudrait considérer les deux suivantes:

$$A-\frac{p}{A} \equiv \sqrt[3]{z}+k\sqrt[3]{z^2} \pmod{\mu},$$

$$\gamma-3\left(A+\frac{p}{A}\right) \equiv y-\sqrt[3]{z}-k\sqrt[3]{z^2} \pmod{\mu}.$$

Réciproquement, si la congruence (1.) n'est pas satisfaite, la congruence proposée n'admet aucune racine rationnelle.

En effet, si la congruence admettait une racine rationnelle, la quantité A devrait être rationnelle; car si cette quantité ne l'était pas, les trois racines seraient irrationnelles; comme nous venons de le reconnaître. Or si A est rationnelle, on a:

$$A^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

et par suite:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Mais, par hypothèse, cette congruence n'est point satisfaite: la congruence proposée ne peut donc admettre aucune racine rationnelle.

§. 5.

La détermination des racines de la congruence proposée est bien simple dans le cas qui nous occupe, puisqu'il suffit de calculer les trois valeurs A', A'' et A''' de la quantité

$$A \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \pmod{\mu};$$

et les trois racines seront données par les formules (3.) du paragraphe précédent, ou par les formules (2, 3 et 4.) du paragraphe 1, en prenant pour A l'une quelconque de ces trois valeurs.

Ce procédé a l'inconvénient de ne pas donner l'expression des racines en fonctions rationnelles des coëfficients de la congruence proposée et du nombre premier μ. En nous appliquant à cette détermination, nous avons pu facilement y arriver lorsque le nombre premier μ avoit l'une des deux formes $18m+7$ et $18m+13$; nous avons, au contraire, reconnu qu'il fallait distinguer plusieurs cas lorsque μ était de la forme $18m+1$. Aussi, pour ne pas donner à ce mémoire trop d'étendue, nous nous contenterons d'exposer la marche à suivre dans les deux premiers cas. Pour le cas où $\mu=18m+1$, nous examinerons les cas où ce nombre premier n'est pas en même temps de la forme $54k+1$; il sera facile au lecteur de suppléer à l'omission que nous ferons par des considérations analogues à celles dans lesquelles nous allons entrer.

Nous devons faire observer ici que nous n'avons point cherché à exprimer les trois racines d'une même congruence en fonctions rationelles des coëfficients du nombre premier, mais seulement l'une d'elles; en second lieu nous avons regardé les expressions $\sqrt{-3}$, $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[3]{p^2}$ etc. comme rationnelles, lorsqu'il était reconnu que ces expressions l'étaient.

§. 6.

Théorème IV. *Si le nombre premier $\mu=6n+1$ est également de la forme $18m+7$, et si la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q\equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\equiv 1 \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: ces trois racines seront données par les formules

$$x'\equiv 2M \pmod{\mu},$$
$$x''\equiv -M+\sqrt{[-3(M^2+p)]} \pmod{\mu},$$
$$x'''\equiv -M-\sqrt{[-3(M^2+p)]} \pmod{\mu};$$

M réprésentant la partie du développement de l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1}$$

qui ne contient pas $\sqrt{(q^2+p^3)}$ en facteur; c'est-à-dire:

$$\tfrac{1}{2}\{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1}+[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1}\}.$$

En vertu de la congruence (1. §. 4.) et de la forme du nombre premier μ, on a:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+3}\equiv[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}] \pmod{\mu}.$$

Extrayant la racine troisième des deux nombres, et posant, pour abréger:

$$[-q+\surd(q^2+p^3)]^{2m+1} \equiv M+N\surd(q^2+p^3) \pmod{\mu},$$

nous aurons:

$$[-q+\surd(q^2+p^3)]^{\frac{1}{3}} \equiv M+N\surd(q^2+p^3) \pmod{\mu}.$$

Changeant le signe de $\surd(q^2+p^3)$, on obtient

$$[-q-\surd(q^2+p^3)]^{\frac{1}{3}} \equiv M-N\surd(q^2+p^3) \pmod{\mu}.$$

Additionnant ces deux congruences, on obtient

$$x' \equiv 2M \pmod{\mu},$$

en remarquant que

$$x' \equiv [-q+\surd(q^2+p^3)]^{\frac{1}{3}}+[-q-\surd(q^2+p^3)]^{\frac{1}{3}} \pmod{\mu}.$$

Les valeurs de x'' et x''' s'obtiennent facilement en divisant le premier membre de la congruence proposée par $x-2M$, ce qui donne pour quotient, $x^2+2Mx+3p+4M^2$: quantité qui, congrue à zéro, donne:

$$x \equiv -M \pm \surd[-3(M^2+p)] \pmod{\mu}.$$

§. 7.

Théorème V. *Si le nombre premier $\mu = 6n+1$ est également de la forme $18m+13$, et si la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

admet trois solutions rationnelles: les trois racines de cette congruence seront données par les formules

$$x' \equiv \frac{1}{M+N\surd(q^2+p^3)} - p[M+N\surd(q^2+p^3)] \pmod{\mu},$$

$$x'' \equiv \frac{1}{M-N\surd(q^2+p^3)} - p[M-N\surd(q^2+p^3)] \pmod{\mu},$$

$$x''' = 2M\left(p+\frac{1}{p^{6m+3}}\right) \pmod{\mu},$$

en posant, pour abréger:

$$[-q+\surd(q^2+p^3)]^{2m+1} \equiv M+N\surd(q^2+p^3) \pmod{\mu}.$$

En vertu de la congruence (1. §. 4.) et de la forme du nombre premier μ, on a:

$$-q+\surd(q^2+p^3) \equiv \frac{1}{[-q+\surd(q^2+p^3)]^{6m+3}} \pmod{\mu}.$$

Extrayant la racine troisième des deux nombres, et posant, pour abréger:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \text{ (mod. } \mu),$$

on trouve

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}} \equiv \frac{1}{M+N\sqrt{(q^2+p^3)}} \text{ (mod. } \mu).$$

On voit ainsi que l'expression

$$\frac{1}{M+N\sqrt{(q^2+p^3)}}$$

est l'une des trois valeurs du radical cubique $[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}$; par conséquent l'une des racines de la congruence proposée sera:

$$x' \equiv \frac{1}{M+N\sqrt{(q^2+p^3)}} - p[M+N\sqrt{(q^2+p^3)}] \text{ (mod. } \mu).$$

De la connaissance de cette racine on pourrait déduire les deux autres, mais il est plus simple de remarquer qu'en changeant le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$ dans la congruence (1. §. 4.), on a:

$$-q-\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv \frac{1}{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+3}} \text{ (mod. } \mu);$$

d'où l'on déduit par un raisonnement analogue au précédent la racine

$$x'' \equiv \frac{1}{M-N\sqrt{(q^2+p^3)}} - p[M-N\sqrt{(q^2+p^3)}] \text{ (mod. } \mu).$$

Comme d'ailleurs on sait que

$$x''' \equiv -(x'+x'') \text{ (mod. } \mu),$$

il en résultera:

$$x''' \equiv 2M\left(p+\frac{1}{p^{6m+3}}\right) \text{ (mod. } \mu),$$

en remarquant que

$$M^2-N^2(q^2+p^3) \equiv -p^{6m+3} \text{ (mod. } \mu).$$

§. 8.

Nous avons vu (§. 4.) que lorsque μ est un nombre premier de la forme $6n+1$, p et q étant deux nombres tels que

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } \mu),$$

la congruence

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \text{ (mod. } \mu)$$

admettait trois racines rationnelles, lorsque la congruence de condition:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv 1 \text{ (mod. } \mu)$$

était satisfaite.

Si nous admettons que μ soit de la forme $18m+1$, nous aurons $2n = 6m$, et par conséquent:

$$(1.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Or, si l'on remarque qu'en désignant par r l'une quelconque des racines primitives de μ, on a pour les trois racines de l'unité:

$$\sqrt[3]{1} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$\sqrt[3]{1} \equiv r^{+\frac{1}{3}(\mu-1)} \equiv -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu},$$
$$\sqrt[3]{1} \equiv r^{-\frac{1}{3}(\mu-1)} \equiv -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu},$$

il en résultera que si la congruence proposée admet trois solutions, nous aurons l'une des trois congruences

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv r^{\frac{1}{3}(\mu-1)} \equiv -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv r^{-\frac{1}{3}(\mu-1)} \equiv -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \pmod{\mu}.$$

Cela posé, nous pourrons établir les *théorèmes* suivants:

I. ***Si le nombre premier*** $\mu = 18m+1$ ***est également de la forme*** $54k+19$, ***et si la congruence proposée***

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv 1 \pmod{\mu}$$

admet trois racines rationnelles: l'une de ces racines sera donnée par la formule

$$x' \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1} - \frac{p}{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1}} \pmod{\mu}.$$

II. ***Si le nombre premier*** $\mu = 18m+1$ ***est également de la forme*** $54k+19$, ***et si la congruence proposée***

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv r^{\pm\frac{1}{3}(\mu-1)} \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: l'une de ces racines sera donnée par la formule

$$x' \equiv \frac{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1}}{r^{\pm\frac{1}{9}(\mu-1)}} - p\,\frac{r^{\pm\frac{1}{9}(\mu-1)}}{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1}} \pmod{\mu}.$$

III. *Si le nombre premier* $\mu = 18m+1$ *est également de la forme* $54k+37$, *et si la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{3}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$(-q+\sqrt{(q^2+p^3)})^{2m} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: l'une de ces racines sera donnée par la formule

$$x' \equiv \frac{1}{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1}} - p[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1} \pmod{\mu}$$

IV. *Si le nombre premier* $\mu = 18m+1$ *est également de la forme* $54k+37$, *et si la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{3}(\mu-1)} \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv r^{\pm\frac{1}{3}(\mu-1)} \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: l'une de ces racines sera donnée par la formule

$$x' \equiv \frac{r^{\pm\frac{1}{3}(\mu-1)}}{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1}} - p\frac{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2k+1}}{r^{\pm\frac{1}{3}(\mu-1)}} \pmod{\mu}.$$

Les démonstrations de ces théorèmes sont analogues à celles des théorèmes précédents, et ne présentent aucune difficulté. D'autre part, il est facile de déterminer les deux autres racines de chaque congruence par la connaissance de l'une d'elles.

Dans le cas où le nombre premier $\mu = 18m+1$ serait aussi de la forme $54k+1$, la congruence de condition (1.) deviendrait:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{18k} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

et il serait facile d'établir des théorèmes analogues aux précédents, en considérant les neuf racines neuvièmes de l'unité; et ainsi de suite.

§. 9.

Lemme I. *Quel que soit le nombre premier* μ: *si la congruence*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

admet des racines rationnelles, elle en admettra, une seule, ou trois.

Remarquons en effet que si deux racines de cette congruence étaient rationnelles, comme la somme des trois racines est congrue à zéro: toutes les trois devraient l'être.

Lemme II. *Si μ est un nombre premier quelconque, b un nombre tel que l'on ait*

$$b^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

en désignant par a, r et s des quantités rationnelles quelconques: l'expression

$$(1.)\qquad N \equiv sM + \frac{r}{M} \pmod{\mu},$$

dans laquelle est

$$M \equiv \sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} \pmod{\mu},$$

ne peut être rationnelle qu'autant qu'on a la relation

$$(2.)\qquad s\sqrt[3]{(a^2-b)} - r \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

En effet, si N est rationnelle, on doit avoir par le théorème de *Fermat:*

$$N^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

et par conséquent

$$\left(sM+\frac{r}{M}\right)^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

Multipliant les deux membres de cette congruence par $sM+\frac{r}{M}$, et remarquant que

$$\left(sM+\frac{r}{M}\right)^{\mu} \equiv s^{\mu}M^{\mu} + \frac{r^{\mu}}{M^{\mu}} \pmod{\mu},$$

$$s^{\mu} \equiv s \pmod{\mu},$$

$$r^{\mu} \equiv r \pmod{\mu},$$

nous obtiendrons:

$$(3.)\qquad sM^{2\mu} + r \equiv sM^{\mu+1} + rM^{\mu-1} \pmod{\mu}.$$

Mais en élevant les deux membres de la congruence

$$M \equiv \sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} \pmod{\mu}$$

à la puissance μ, en supprimant les multiples de μ et en tenant compte de la relation

$$b^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

on obtient:

$$M^{\mu} \equiv \sqrt[3]{(a-\sqrt{b})} \pmod{\mu};$$

par conséquent nous aurons

$$M^{\mu+1} \equiv \sqrt[3]{(a^2-b)} \quad (\text{mod. } \mu),$$

$$M^{\mu} \equiv \frac{\sqrt[3]{(a^2-b)}}{M} \quad (\text{mod. } \mu),$$

$$M^{2\mu} \equiv \frac{\sqrt[3]{[(a^2-b)^2]}}{M^2} \quad (\text{mod. } \mu),$$

$$M^{\mu-1} \equiv \frac{\sqrt[3]{(a^2-b)}}{M^2} \quad (\text{mod. } \mu).$$

Ces valeurs, mises dans la congruence (3.), donnent

$$[s\sqrt[3]{(a^2-b)}-r]M^2 \equiv s\sqrt[3]{[(a^2-b)^2]}-r\sqrt[3]{(a^2-b)} \quad (\text{mod. } \mu),$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$[s\sqrt[3]{(a^2-b)}-r][M^2-\sqrt[3]{(a^2-b)}] \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu),$$

si nous remarquons que l'on ne peut pas poser

$$M^2 \equiv \sqrt[3]{(a^2-b)} \quad (\text{mod. } \mu);$$

car il en résulterait

$$\sqrt{b} \equiv -\frac{b}{a} \quad (\text{mod. } \mu):$$

congruence absurde, puisqu'elle donne pour $\sqrt{b}$ une valeur rationnelle; ce qui par hypothèse ne peut être admis, b étant tel que

$$b^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \quad (\text{mod. } \mu),$$

tandis qu'il faudroit que l'on ait

$$s\sqrt[3]{(a^2-b)}-r \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu).$$

§. 10.

Théorème VI. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n+1$, et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \quad (\text{mod. } \mu),$$

la congruence

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mu)$$

ne pourra admettre plus d'une racine rationnelle.

En vertu du lemme I., cette proposition sera démontrée si nous prouvons que les trois racines ne peuvent être rationnelles. Si les trois racines x', x'' et x''' sont rationnelles, la valeur de l'expression

$$A+\frac{p}{A}$$

le sera. Comme d'ailleurs $\sqrt{-3}$ est une quantité rationnelle, puisque μ est de la forme $6n+1$; il est nécessaire (vu les valeurs de x' et x'') que lexpression

$$A+\frac{p}{A}$$

soit également rationnelle.

Or il est facile de démontrer que cette expression ne l'est pas, quelle que soit la forme du nombre premier μ. Il suffit pour cela de faire dans la congruence (2.) du paragraphe précédent:

$$\begin{aligned} a &\equiv -q \pmod{\mu}, \\ b &\equiv q^2+p^3 \pmod{\mu}, \\ s &\equiv 1 \pmod{\mu}, \\ r &\equiv p \pmod{\mu}, \end{aligned}$$

et nous aurons:

$$-2p \equiv 0 \pmod{\mu}:$$

congruence qu'on ne peut admettre; car il en résultera $p\equiv 0$, et la quantité $\sqrt{(q^2+p^3)}$ ne serait plus irrationnelle.

§. 11.

On peut arriver au même résultat, en remarquant que si $x\equiv x_1 \pmod{\mu}$ est une racine rationnelle de la congruence proposée, les trois racines seront données par les expressions

$$x'\equiv x_1,\quad x''\equiv -\tfrac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}}{x_1^2+p},\quad x'''\equiv -\tfrac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}}{x_1^2+p} \pmod{\mu};$$

car on a

$$x'+x''+x'''\equiv 0,\quad x'x''+x'x'''+x''x'''\equiv 3p,\quad x'x''x'''\equiv -q \pmod{\mu},$$

(en vertu de la relation

$$x_1^3+3px_1+2q \equiv 0 \pmod{\mu}).$$

Il résulte de là que, comme $\sqrt{-3}$ est une quantité rationnelle par la forme de $\mu=6n+1$, l'expression $\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}$ sera irrationnelle; et par suite, si x_1 est irrationnelle, les valeurs de x' et x'' seront irrationnelles.

§. 12.

Théorème VII. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n+1$, et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait la relation*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

la congruence proposée

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$



admettra une solution rationnelle, ou n'en admettra aucune, selon, qu'en désignant par M la partie rationnelle du développement de l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n},$$

la congruence

$$(2M-1)^2(M+1) \equiv -\frac{2q^2}{p^3} \pmod{\mu}$$

sera, ou ne sera pas satisfaite.

Nous avons reconnu par le théorème précédent que la congruence proposée ne pouvait admettre qu'une seule racine, donnée par l'expression

$$x \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]}+\sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \pmod{\mu}.$$

En admettant que cette valeur de x est rationnelle, on pourra, en désignant par A et B des quantités également rationnelles, poser:

$$(1.)\quad \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv A+B\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

et il en resultera

$$(2.)\quad \sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv A-B\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

De ces deux congruences on déduit aisément:

$$(3.)\quad x \equiv 2A \pmod{\mu},$$

$$(4.)\quad A^2-B^2(q^2+p^3) \equiv -p \pmod{\mu}.$$

Comme le nombre premier μ est de la forme $6n+1$: en élevant les deux membres de la congruence (1.) à la puissance $\mu-1=6n$, on aura:

$$(5.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv [A+B\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\mu-1} \equiv \frac{A-B\sqrt{(q^2+p^3)}}{A+B\sqrt{(q^2+p^3)}} \pmod{\mu},$$

et en faisant, pour abréger,

$$(6.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

auquel cas on a

$$(7.)\quad M \equiv q^{2n}+\tfrac{3}{1}n.\frac{2n-1}{2}q^{2n-2}(q^2+p^3)$$
$$+\tfrac{3}{1}n.\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-2}{3}.\frac{2n-3}{4}q^{2n-4}(q^2+p^3)^2+\cdots \pmod{\mu},$$

on obtient au moyen des congruences (5. et 6.):

$$(8.)\quad \frac{A-B\sqrt{(q^2+p^3)}}{A+B\sqrt{(q^2+p^3)}} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

et par suite

$$(9.)\quad \frac{A+B\sqrt{(q^2+p^3)}}{A-B\sqrt{(q^2+p^3)}} \equiv M-N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

De ces deux congruences on déduit

$$(10.)\qquad M^2 - N^2(q^2+p^3) \equiv 1 \pmod{\mu},$$
$$(11.)\qquad MA + NB(q^2+p^3) \equiv A \pmod{\mu}.$$

Si maintenant on élimine B et N entre les congruences (4. 10. et 11.), on obtiendra:

$$(12.)\qquad 4A^2 \equiv -2p(M+1) \pmod{\mu};$$

et comme par hypothèse $x \equiv 2A$ est une racine rationnelle de la congruence proposée, on aura

$$(13.)\qquad 4A^3 + 3pA + q \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

Éliminant A entre ces deux congruences, on trouve

$$(14.)\qquad (2M-1)^2(M+1) \equiv -\frac{2q^2}{p^3} \pmod{\mu}.$$

Telle est la rélation qui doit exister entre les coefficients de la congruence proposée, pour que cette congruence puisse admettre une solution rationnelle.

§. 13

Théorème VIII. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n+1$, et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait la relation*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu};$$

tandis que la congruence proposée

$$x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

admet une solution rationnelle: cette solution sera donnée par la formule

$$x \equiv \frac{2q}{p(2M-1)} \pmod{\mu};$$

M représentant la partie rationnelle du développement de l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n}$$

par la formule du binôme.

En effet, la seule racine rationnelle de la congruence proposée étant

$$x \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} + \sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv 2A \pmod{\mu},$$

nous aurons, en vertu de la congruence (12.) du paragraphe précédent:

$$(1.)\qquad x^2 \equiv -2p(M+1),$$

et par suite on a pour x les deux valeurs

$$x \equiv +\sqrt{[-2p(M+1)]} \pmod{\mu},$$
$$x \equiv -\sqrt{[-2p(M+1)]} \pmod{\mu}.$$

Il peut paraître surprenant que l'on obtienne pour x deux valeurs rationnelles, égales et de signes contraires, tandis que la congruence proposée ne peut admettre qu'une seule solution. Cette difficulté s'explique aisément si l'on remarque que, M conservant la même valeur, quel que soit le signe de q, les deux valeurs précédentes ne sont pas toutes deux racines de la congruence proposée

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

mais que l'une de ces valeurs est une racine de cette congruence et l'autre appartient à la congruence

$$x^3+3px-2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

à laquelle on pourrait appliquer le même raisonnement qui nous a conduit à la congruence (12.) du paragraphe précédent, en changeant q en $-q$; ce qui n'altérerait pas cette dernière congruence.

Si nous voulons connaître celle de ces deux valeurs de x qui appartient à la congruence proposée, il suffit d'éliminer x^2 entre les congruences

$$x^2 \equiv -2p(M+1) \pmod{\mu},$$
$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu};$$

ce qui conduit à la solution

$$x \equiv \frac{2q}{p(2M-1)} \pmod{\mu}.$$

§. 14.

On peut aussi démontrer les deux théorèmes que nous venons de donner, d'une manière plus simple, en remarquant que l'on a identiquement:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^\mu \equiv -q-\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

Par suite on trouve

$$x \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}+[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}$$
$$\equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}+[1+(-q+\sqrt{(q^2+p^3)})^{\frac{1}{3}(\mu-1)}] \pmod{\mu}:$$

valeur qu'on peut mettre sous la forme

$$x \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}[1+M+N\sqrt{(q^2+p^3)}] \pmod{\mu},$$

en ayant égard à la congruence (6. §. 12.).

En changeant le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$, ce qui n'altère pas la valeur de x, on a:

$$x \equiv [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}[1+M-N\sqrt{(q^2+p^3)}] \pmod{\mu}.$$

Multipliant ces deux valeurs de x, et ayant égard à la congruence (10.) du (§. 12), on obtient (toute réduction faite)

$$x^2 \equiv -2p(M+1) \pmod{\mu}.$$

Cette valeur de x^2, mise dans la congruence proposée, donne l'équation de condition

$$(2M-1)^2(M+1) \equiv -\frac{2q^2}{p^3} \pmod{\mu}.$$

Quant à la valeur de x, on l'obtiendrait comme dans le paragraphe précédent.

§. 15.

Si l'on remarque que la congruence précédente peut se mettre sous la forme

$$4M^3-3M+1+\frac{2q^2}{p^3} \equiv 0 \pmod{\mu},$$

ou bien sous celle-ci:

$$z^3-3z+2\left(1+\frac{2q^2}{p^3}\right) \equiv 0 \pmod{\mu},$$

en supposant $z = 2M$, il en résultera que si cette dernière congruence admet une solution rationnelle, solution qui sera donnée par

$$z \equiv \frac{2\left(1+\frac{2q^2}{p^3}\right)}{1-2M'} \pmod{\mu},$$

en supposant

$$(1.)\quad M' \equiv \left(1+\frac{2q^2}{p^3}\right)^{2n} + \frac{2}{1}n.\frac{2n-1}{2}\left(1+\frac{2q^2}{p^3}\right)^{2n-2}\left[\left(1+\frac{2q^2}{p^3}\right)^2-1\right]$$
$$+\frac{2}{1}n.\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-2}{3}.\frac{2n-3}{4}\left(1+\frac{2q^2}{q^3}\right)^{2n-4}\left[\left(1+\frac{2q^2}{p^3}\right)^2-1\right]^2+\cdots \pmod{\mu}:$$

la valeur de z devra être égale à $2M$, pour que la congruence proposée

$$x^3+3p+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

admette une solution rationnelle.

On voit ainsi que si la congruence proposée admet une racine rationnelle, on aura la relation

$$M(1-2M') \equiv 1+\frac{2q^2}{p^3} \pmod{\mu},$$

M et M' étant données par la formule (7. §. 12.) et par la formule (1.) de celui-ci.

Réciproquement, si cette congruence est satisfaite, la congruence proposée admettra une racine, donnée par la formule

$$x \equiv \frac{2q}{p(2M-1)}$$

§. 16.

Théorème IX. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n-1$, et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait:*

$$(q^2+q^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

la congruence proposée:

$$x^3+3px-2q \equiv 0 \pmod{u}$$

admettra trois racines rationnelles, ou n'en admettra aucune.

Si nous supposons que $x \equiv x_1 \pmod{\mu}$ soit une solution rationnelle de la congruence proposée, nous pouvons facilement reconnaître que les trois solutions seront exprimées par:

$$(1.)\quad x' \equiv x_1 \pmod{\mu}.$$

$$(2.)\quad x'' \equiv -\tfrac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}}{x_1^2+p} \pmod{\mu},$$

$$(3.)\quad x''' \equiv -\tfrac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}}{x_1^2+p} \pmod{\mu};$$

car, en vertu de la relation

$$x_1^3+3px_1+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

on a les identités:

$$x'+x''+x''' \equiv 0 \pmod{\mu},$$
$$x'x''+x'x'''+x''x''' \equiv 3p \pmod{\mu},$$
$$x'x''x'' \equiv -2q \pmod{\mu}.$$

Il résulte de la que, comme -3 est racine impaire de tout nombre promier μ de la forme $6n-1$, l'expression $\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}$ sera rationnelle, et les trois racines de la congruence proposée, se composant de parties rationnelles, seront elles mêmes rationnelles.

§. 17.

Théorème X. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n-1$, et si p et q sont des nombres tels que l'on ait la relation*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

la congruence proposée

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

admettra trois racines rationnelles, ou n'en admettra aucune; selon, qu'en désignant par M la partie rationnelle du développement de l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n-1},$$

la congruence

$$(A.)\quad Mp^2 \equiv -q \pmod{\mu}$$

sera satisfaite, ou ne le sera pas.

En désignant par A et B deux quantités rationnelles, posons:

$$(1.)\quad \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv A+B\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

Il en résultera

$$(2.)\quad \sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \equiv A-B\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

De ces deux congruences on déduit aisément:

$$(3.)\quad x \equiv 2A \pmod{\mu},$$

$$(4.)\quad A^2+B^2(q^2+p^3) \equiv -p \pmod{\mu}.$$

Comme le nombre premier μ est de la forme $6n-1$: en élevant les deux membres de la congruence (1.) à la puissance $\mu-1$, et en ayant égard à la congruence (2.), on trouvera:

$$(5.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n-1} \equiv \frac{A-B\sqrt{(q^2+p^3)}}{[A+B\sqrt{(q^2+p^3)}]^2} \pmod{\mu}.$$

Si nous posons, pour abréger:

$$(6.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n-1} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

ce qui donne

$$M \equiv (-q)^{2n-1}+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}(-q)^{2n-3}(q^2+p^3)$$
$$+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}\cdot\frac{2n-4}{4}(-q)^{2n-5}(q^2+p^3)^2+\cdots \pmod{\mu},$$

nous aurons

$$(7.)\quad \frac{A-B\sqrt{(q^2+p^3)}}{[A+B\sqrt{(q^2+p^3)}]^2} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

Changeant le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$ dans cette congruence, on obtient:

$$(8.)\quad \frac{A+B\sqrt{(q^2+p^3)}}{[A-B\sqrt{(q^2+p^3)}]^2} \equiv M-N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

De ces deux dernières relations on tire:

$$M^2 - N^2(q^2+p^3) \equiv -\frac{1}{p} \text{ (mod. } \mu),$$
$$[A^2+B^2(q^2+p^3)]M+2ABN(q^2+p^3) \equiv A \text{ (mod. } \mu).$$

Eliminant B et N entre la congruence (4.) et les deux dernières, on obtient, toutes réductions faites:

$$(9.)\quad 4A^3+3pA \equiv Mp^2 \text{ (mod. } \mu).$$

Cela posé: si l'on admet que la congruence proposée admette une racine rationnelle, les trois racines seront rationnelles en vertu du théorème précédent; par conséquent $2A$ sera une quantité rationnelle qui devra satisfaire à la congruence

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \text{ (mod. } \mu);$$

on aura donc

$$4A^3+3pA \equiv -q \text{ (mod. } \mu).$$

Comparant cette congruence avec celle (9.), nous aurons la relation

$$Mp^2 \equiv -q \text{ (mod. } \mu).$$

Il résulte de là que si cette dernière congruence est satisfaite, la quantité $2A$, qui est rationnelle, est racine de la congruence proposée; et par conséquent il existe trois racines rationnelles, propres à satisfaire à la congruence donnée.

Si cette dernière congruence n'est pas satisfaite, il est absurde de supposer que $2A$ soit une racine rationnelle de la congruence donnée; et par suite il ne saurait en exister aucune.

§. 18.

Pour déterminer les racines de la congruence proposée, dans le cas où l'équation de condition (*A.*) du paragraphe précédent est satisfaite, on pourra avoir recours à la congruence (4.) du même paragraphe, que l'on mettra sous la forme

$$A^2+p \equiv B^2(q^2+p^3) \text{ (mod. } \mu).$$

Élevant ses deux membres à la puissance $\frac{1}{2}(\mu-1) = 3n-1$, et remarquant que

$$B^{6n-2} \equiv B^{\mu-1} \equiv +1 \text{ (mod. } \mu),$$
$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \text{ (mod. } \mu),$$

nous aurons:

$$(A^2+p)^{3n-1} \equiv -1 \text{ (mod. } \mu).$$

Développant le premier membre de cette congruence par la formule du binôme, et simplifiant le résultat au moyen de la congruence

$$4A^3+3pA+q \equiv 0 \text{ (mod. } \mu),$$

on arrivera nécessairement à une congruence du second degré, de la forme

$$(1.)\quad LA^2+SA+T\equiv 0 \ (\text{mod.}\ \mu).$$

De ces deux congruences suit

$$4SA^2+(4T-3pL)A-qL\equiv 0 \ (\text{mod.}\ \mu).$$

Éliminant A^2 entre ces deux congruences, on obtient:

$$A\equiv\frac{qL^2+4ST}{4LT-4S^2-3pL^2} \ (\text{mod.}\ \mu);$$

et par suite une des racines de la congruence proposée sera

$$x_1\equiv\frac{2(qL^2+4ST)}{4LT-4S^2-3pL^2} \ (\text{mod.}\ \mu).$$

Les congruences (2. et 3. §. 16.) détermineront les deux autres racines.

Ce procédé ne donne pas l'expression des racines en fonctions rationnelles des coëfficients de la congruence proposée et du nombre premier μ. Nous allons présenter dans les paragraphes suivants la détermination des racines sous ce point de vue, lorsque le nombre premier a l'une des deux formes $18m+11$ et $18m+5$; nos recherches ayant été infructueuses pour le cas où μ est de la forme $18m+17$.

§. 19.

Lemme. *Si μ est un nombre premier de la forme $6n-1$, et si la congruence*

$$x^3+3px+2q\equiv 0 \ (\text{mod.}\ \mu),$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\equiv -1 \ (\text{mod.}\ \mu),$$

admet trois racines rationnelles, on aura:

$$(a.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n}\equiv -p \ (\text{mod.}\ \mu).$$

Remarquons d'abord que l'on a identiquement:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\mu}\equiv -q-\sqrt{(q^2+p^3)} \ (\text{mod.}\ \mu).$$

Par suite la valeur de x:

$$x\equiv\sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]}+\sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \ (\text{mod.}\ \mu)$$

peut dire écrite:

$$x\equiv[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}+[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}\mu} \ (\text{mod.}\ \mu),$$

d'où l'on tire:

$$(1.)\quad x[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}\equiv[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}}+P+Q\sqrt{(q^2+p^3)} \ (\text{mod.}\ \mu).$$

En posant, pour abréger:

$$(2.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv P+Q\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

et changeant dans la congruence (1.) le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$, on obtient

$$(3.)\quad x[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}} \equiv [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}}+P-Q\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

Additionnant les congruences (1. et 3.), on trouve

$$x^2 \equiv 2P+[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}}+[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}} \pmod{\mu}.$$

Si l'on remarque d'autre part que l'on a:

$$x^2 \equiv -2p+[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}}+[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}} \pmod{\mu},$$

il en résultera

$$(4.)\quad P \equiv -p \pmod{\mu}.$$

Changeant dans la congruence (2.) le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$, on a

$$[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv P-Q(q^2+p^3) \pmod{\mu}.$$

Cette congruence, multipliée par la congruence (2.), donne

$$P^2-Q^2(q^2+p^3) \equiv p^{6n} \equiv p^2 \pmod{\mu}:$$

congruence qui, en vertu de la relation (4.), fait voir que

$$Q \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

La congruence (2.) peut donc être écrite:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv -p \pmod{\mu};$$

ce qu'il fallait démontrer.

§. 20.

Théorème XI. *Si le nombre premier $\mu = 6n-1$ est également de la forme $18m+11$, et si la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et p sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: ces trois racines seront données par les formules:

$$x' \equiv 2M\sqrt[3]{p^2} \pmod{\mu},$$
$$x'' \equiv -\sqrt[3]{p^2}[M+N\sqrt{(-3(q^2+p^3))}] \pmod{\mu},$$
$$x''' \equiv -\sqrt[3]{p^2}[M-N\sqrt{(-3(q^2+p^3))}] \pmod{\mu},$$

M et N représentant la partie rationnelle et le coefficient de $\sqrt{(q^2+p^3)}$

du développement de l'expression $[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1}$ *par la formule du binôme.*

Si l'on remarque qu'en vertu du lemme du paragraphe précédent on a:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv -p \pmod{\mu},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n-1} \equiv \frac{-p}{-q+\sqrt{(q^2+p^3)}} \equiv \frac{-q-\sqrt{(q^2+p^3)}}{p^2} \pmod{\mu},$$

et qu'en changeant le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$, on aura de même:

$$[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n-1} \equiv \frac{-p}{-q-\sqrt{(q^2+p^3)}} \equiv \frac{-q+\sqrt{(q^2+p^3)}}{p^2} \pmod{\mu},$$

que par suite les valeurs de x:

$$x' \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}} + [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}} \pmod{\mu},$$

$$x'' \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu},$$

$$x''' \equiv [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu},$$

pourront être écrites sous la forme

$$(1.)\quad x' \equiv \sqrt[3]{p^2}\{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}(n-1)} + [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}(n-1)}\} \pmod{\mu},$$

$$(2.)\quad x'' \equiv \sqrt[3]{p^2}\{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}(n-1)}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}(n-1)}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\} \pmod{\mu},$$

$$(3.)\quad x''' \equiv \sqrt[3]{p^2}\{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}(n-1)}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{2}{3}(n-1)}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\} \pmod{\mu}$$

en posant, pour abréger:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

d'où résulte

$$[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1} \equiv M-N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu};$$

et si l'on remarque que μ étant de la forme $18m+11$, on aura

$$\tfrac{2}{3}(n-1) = 2m+1:$$

il en résultera:

$$x' \equiv 2M\sqrt[3]{p^2} \pmod{\mu},$$

$$x'' \equiv -\sqrt[3]{p^2}[M+N\sqrt{(-3(q^2+p^3))}] \pmod{\mu},$$

$$x''' \equiv -\sqrt[3]{p^2}[M-N\sqrt{(-3(q^2+p^3))}] \pmod{\mu}.$$

§. 21.

Théorème XII. *Si le nombre premier $\mu = 6n-1$ est également de la forme $18m+5$, et si la congruence proposée,*

$$x^3 + 3px + 2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: ces trois racines seront données par les formules:

$$x' \equiv \frac{-2q}{p(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)} \pmod{\mu},$$

$$x'' \equiv \frac{-q}{p(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)} + \frac{p^2(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}}{4q^2+p^2(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)^2} \pmod{\mu},$$

$$x''' \equiv \frac{-q}{p(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)} - \frac{p^2(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}}{4q^2+p^2(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)^2} \pmod{\mu};$$

M représentant la partie rationnelle du développement de l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m}$$

par la formule du binôme.

Si nous remarquons qu'en vertu de l'égalité $6n-1 = 18m+5$, on a:

$$\tfrac{2}{3}(n-1) = 2m+\tfrac{1}{3},$$

la valeur de x', donnée par la congruence (1.) du paragraphe précédent, pourra s'écrire:

$$x' \equiv \sqrt[3]{p^2}.\{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m}\sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]}$$
$$+[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m}\sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]}\} \pmod{\mu}.$$

En faisant pour abréger:

$$(1.)\qquad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

et en remarquant que

$$x' \equiv \sqrt[3]{[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]}+\sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \pmod{\mu},$$

on obtiendra:

$$x'[1-\sqrt[3]{p^2}(M-N\sqrt{(q^2+p^3)})] \equiv 2\sqrt[3]{p^2}.N\sqrt{(q^2+p^3)}\sqrt[3]{[-q+(q^2+p^2)]} \pmod{\mu}.$$

Changeant dans cette congruence le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$, se qui n'altère pas

la valeur de x', on trouve:

$$x'[1-\sqrt[3]{p^2}(M+N\sqrt{(q^2+p^3)})] \equiv -2\sqrt[3]{p^2}.N\sqrt{(q^2+p^3)}\sqrt[3]{[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]} \pmod{\mu}.$$

Multipliant ces deux dernières congruences membre à membre, il en résulte:

$$(2.)\quad x'^2[(1-\sqrt[3]{p^2}.M)^2-p\sqrt[3]{p}.N^2(q^2+p^3)] \equiv 4p^2\sqrt[3]{p}.N^2(q^2+p^3) \pmod{\mu}.$$

Changeant le signe de $\sqrt{(q^2+p^3)}$ dans la congruence (1.), on a:

$$(3.)\quad [-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv M-N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu}.$$

Multipliant membre à membre les congruences (1. et 3.), on en déduit:

$$(4.)\quad M^2-N^2(q^2+p^3) \equiv p^{6m} \pmod{\mu}.$$

Comme d'ailleurs en vertu du Théorème de *Fermat* on a:

$$p^{18m+4} \equiv 1 \pmod{\mu},$$

il en résultera:

$$p^{6m+2} \equiv \sqrt[3]{p^2} \pmod{\mu},$$

$$p^{6m+1} \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{p}} \pmod{\mu}.$$

On pourra, au moyen de ces dernières congruences, donner à la congruence (2.) la forme très simple

$$x'^2(1-\sqrt[3]{p^2}.M) \equiv -2p(1-p\sqrt[3]{p}.M^2) \pmod{\mu},$$

si l'on remarque que

$$1-p\sqrt[3]{p}.M^2 \equiv (1-\sqrt[3]{p^2}.M)(1+\sqrt[3]{p}.M) \pmod{\mu}.$$

En substituant cette valeur dans la congruence précédente, et en supprimant le facteur $1-\sqrt[3]{(p^2}.M$, qui, comme nous allons le reconnaître, ne peut être congru à zéro, nous aurons:

$$x'^2 \equiv -2p(1+\sqrt[3]{p^2}.M) \pmod{\mu}.$$

Si l'on remarque que la congruence proposée donne

$$x' \equiv \frac{-2q}{x'^2+3p} \pmod{\mu},$$

il en résulte:

$$(5.)\quad x' \equiv \frac{2q}{p(2\sqrt[3]{p^2}.M-1)} \pmod{\mu}.$$

Les valeurs de x'' et x''' se déduisent trop simplement de la connaissance de x', pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter.

Pour compléter la démonstration de notre théorème, il nous reste à prouver que le facteur $1-\sqrt[3]{p^2}.M$ ne peut dans aucun cas être congru à zéro.

En effet, en supposant

$$1-\sqrt[3]{p^2}.M \equiv 0 \pmod{\mu},$$

il en résultera:

$$M \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \pmod{\mu}.$$

Cette valeur de M, mise dans la congruence (4.), donne

$$N \equiv 0 \pmod{\mu};$$

on aura donc en vertu de la congruence (1.):

$$(6.)\quad [-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \pmod{\mu}.$$

D'un autre côté le lemme du (§. 19.) donne

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+2} \equiv -p \pmod{\mu},$$

et de ces deux congruences on tire:

$$\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv q \pmod{\mu}:$$

congruence absurde, puisque le 1r membre est irrationnel, tandis que le second ne l'est pas.

§. 22.

On pourrait craindre que la valeur de x', donnée par la congruence (5.) du paragraphe précédent, ne devint illusoire, en ce que pour certaines valeurs de p et q son dénominateur deviendrait congru à zéro. Or il est facile de démontrer que si q n'est pas congru à zéro, il n'est pas possible que l'on ait:

$$2\sqrt[3]{p^2}.M-1 \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

En effet, on déduit de cette congruence

$$M \equiv \frac{1}{2\sqrt[3]{p^2}} \pmod{\mu};$$

cette valeur de M mise dans la congruence (4.), donne

$$N\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv \frac{\pm\sqrt{-3}}{2\sqrt[3]{p^2}} \pmod{\mu};$$

on aura donc en vertu de la congruence (1.):

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}}\left(\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) \pmod{\mu}.$$

Cette congruence, combinée avec la suivante:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+2} \equiv -p \pmod{\mu},$$

donne

$$q\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv q^2 \pmod{\mu}.$$

Comme par hypothèse q n'est pas congru à zéro, on a:

$$\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv q \pmod{\mu}:$$

congruence absurde.

§. 23.

Voici encore un théorème analogue au théorème précédent, et qu'on pourrait lui substituer pour la détermination des racines dans la congruence proposée, dans le cas particulier qui nous occupe.

Théorème XIII. *Si le nombre premier* $\mu = 6n-1$ *est également de la forme* $18m+5$, *et si la congruence proposée*

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu},$$

dans laquelle p et q sont tels que l'on a:

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$

admet trois racines rationnelles: ces racines seront données par les formules

$$x' \equiv \frac{2M'}{\sqrt[3]{p}} \pmod{\mu},$$

$$x'' \equiv \frac{M'}{\sqrt[3]{p}} + \frac{\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}\sqrt[3]{p^2}}{4M'^2+p\sqrt[3]{p^2}} \pmod{\mu},$$

$$x''' \equiv \frac{M'}{\sqrt[3]{p}} - \frac{\sqrt{[-3(q^2+p^3)]}\sqrt[3]{p^2}}{4M'^2+p\sqrt[3]{p^2}} \pmod{\mu};$$

M' représentant la partie rationnelle que l'on obtient en développant l'expression

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1}$$

par la formule du binôme.

Si nous remarquons qu'en vertu de l'égalité $6n-1 = 18m+5$ on a:

$$2n = 6m+2,$$

on pourra écrire la congruence

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2n} \equiv -p \pmod{\mu}$$

sous la forme

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+3} \equiv -p[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}] \pmod{\mu}.$$

Extrayant la racine troisième des deux membres, et posant, pour abréger:

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1} \equiv M'+N'\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

nous aurons l'une des congruences

$$(a.) \quad \begin{cases} M'+N'\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv -\sqrt[3]{p}[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}} \pmod{\mu}, \\ M'+N'\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv -\sqrt[3]{p}[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}, \\ M'+N'\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv -\sqrt[3]{p}[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}. \end{cases}$$

Quelle que ce soit de ces congruences qui soit satisfaite, on en déduira, en changeant le signe des radicaux:

$$(b.) \quad \begin{cases} M'-N'\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv -\sqrt[3]{p}[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}} \pmod{\mu}, \\ M'-N'\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv -\sqrt[3]{p}[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}, \\ M'-N'\sqrt{(q^2+p^3)} \equiv -\sqrt[3]{p}[-q-\sqrt{(q^2+p^3)}]^{\frac{1}{3}}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}) \pmod{\mu}. \end{cases}$$

En additionnant celle des congruences ($a.$) qui est satisfaite, avec la congruence ($b.$) correspondante, le second membre ne sera autre chose que $-\sqrt[3]{p}$, multiplié par l'une des racines de la congruence proposée; en désignant cette racine par x', nous aurons:

$$2M' \equiv -\sqrt[3]{p}.x' \pmod{\mu},$$

et par conséquent

$$x' \equiv -\frac{2M'}{\sqrt[3]{p}} \pmod{\mu}.$$

On déduit aisément de là les valeurs de x'' et x'''.

§. 24.

Théorème. XIV. *Si μ est un nombre premier de la forme $18m+5$, et si p et q sont deux nombres tels que l'on ait:*

$$(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \equiv -1 \pmod{\mu},$$
$$M_1 p^2 \equiv -q \pmod{\mu},$$

M_1 représentant la partie rationnelle du développement de l'expression $[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+1}$, en désignant par M et M' les parties rationnelles des développements des expressions $[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m}$ et $[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1}$: nous aurons la congruence

$$(1.) \quad M' \equiv \frac{q}{\sqrt[3]{p}(\sqrt[3]{p}-2pM)} \pmod{\mu}.$$

Ce théorème serait évident si l'on admettait que les trois valeurs de x', x'' et x''', données dans le paragraphe précedent, soient respectivement égales aux trois valeurs x', x'' et x''' obtenues dans le (§. 22.); car en égalant les valeurs de x', on obtiendrait la congruence (1.); notre théorème aura donc l'avantage d'établir cette concordance.

Si nous considérons les congruences

$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{6m+2} \equiv -p \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m} \equiv M+N\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$
$$[-q+\sqrt{(q^2+p^3)}]^{2m+1} \equiv M'+N'\sqrt{(q^2+p^3)} \pmod{\mu},$$

et si nous remarquons que:

$$M^2-N^2(q^2+p^3) \equiv p^{6m} \equiv \frac{1}{p\sqrt[3]{p}} \pmod{\mu},$$
$$M'^2-N'^2(q^2+p^3) \equiv -p^{6m+3} \equiv -p\sqrt[3]{p^2} \pmod{\mu},$$

nous obtiendrons:

$$[M'^2+N'^2(q^2+p^3)+2M'N'\sqrt{(q^2+p^3)}][M+N\sqrt{(q^2+p^3)}] \equiv -p \pmod{\mu}:$$

congruence qu'on peut décomposer dans les deux suivantes:

$$M'^2M+N'^2M(q^2+p^3)+2M'N'N(q^2+p^3) \equiv -p \pmod{\mu},$$
$$M'^2N+N'^2N(q^2+p^3)+2M'N'M \equiv 0 \pmod{\mu}.$$

De ces deux congruences on tire:

$$(2.)\quad 2M'^2+p\sqrt[3]{p^2} \equiv -p^2\sqrt[3]{p}.M \pmod{\mu},$$

et mettant dans la congruence

$$x^3+3px+2q \equiv 0 \pmod{\mu}$$

pour x sa valeur $-\frac{2M'}{\sqrt[3]{p}}$, on obtient:

$$(4.)\quad 4M'^3+3p\sqrt[3]{p^2}.M'-pq \equiv 0 \pmod{};$$

éliminant M'^2 entre ces deux congruences (2. et 3.), on obtient la congruence (1.).

Genève, Octobre 1852.

24.

Note sur les séries décroissantes dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

(Par Mr. *Oltramare,* prof. des math. supér. à l'acad. des sciences de Genève.)

---

§. 1.

Bien que les séries décroissantes dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, soient convergentes, il arrive cependant quelquefois que la convergence est si faible que ces séries ne sauraient être employées pour déterminer les valeurs approximatives des quantités qu'elles représentent.

Notre but, dans cette note, est d'exposer un procédé fort simple, au moyen duquel on peut transformer ces sortes de séries en d'autres, d'autant plus convergentes que les suites proposées le sont moins.

§. 2.

Considérons, pour cela, la série générale

$$(1.)\qquad S = a-b+c-d+\cdots,$$

dans laquelle nous supposerons

$$a > b > c > d > \text{etc.}$$

En désignant par λ et μ deux quantités quelconques, faisons:

$$\begin{array}{lllll}
(a.) & a' = \lambda a - \mu b, & b' = \lambda b - \mu c, & c' = \lambda c - \mu d, & \text{etc.,} \\
(b.) & a'' = \lambda a' - \mu b', & b'' = \lambda b' - \mu c', & c'' = \lambda c' - \mu d', & \text{etc.,} \\
(c.) & a''' = \lambda a'' - \mu b'', & b''' = \lambda b'' - \mu c'', & c''' = \lambda c'' - \mu d'', & \text{etc.,} \\
 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\
(m.) & a^{(m)} = \lambda a^{(m-1)} - \mu b^{(m-1)}, & b^{(m)} = \lambda b^{(m-1)} - \mu c^{(m-1)}, & c^{(m)} = \lambda c^{(m-1)} - \mu c^{(m-1)}, & \text{etc.} \\
 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots &
\end{array}$$

Cela posé, concevons qu'on ait calculé la table suivante:

Rang,	Termes auxiliaires,	1r terme,	2d terme,	3ième terme,	4ième terme	etc.
	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	etc.
1	0	a	b	c	d	etc.
2	$\frac{\mu}{\mu+\lambda}a$	a'	b'	c'	d'	etc.
3	$\frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}a'$	a''	b''	c''	d''	etc.
4	$\frac{\mu}{(\mu+\lambda)^3}a''$	a'''	b'''	c'''	d'''	etc.
. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .
m	$\frac{\mu}{(\mu+\lambda)^{m-1}}a^{(m-2)}$	$a^{(m-1)}$	$b^{(m-1)}$	$c^{(m-1)}$	$d^{(m-1)}$	etc.,
. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .

dont le mode de formation des différents termes est extrêmement simple.

1° Le premier rang horizontal contient, suivant leur ordre, les différents termes de la série proposée (1.); abstraction faite de leurs signes qui figurent dans la ligne supérieure.

2° Le terme que nous avons désigné sous le nom de *terme auxiliaire* dans chaque rang, s'obtient en multipliant par μ le premier terme du rang précédent, et en divisant le produit obtenu par $\mu+\lambda$, élevé à une puissance égale au rang du terme que l'on veut former, diminué d'une unité.

3° Enfin, chacun des autres termes de la table se forme au moyen du terme immédiatement au dessus, et de celui qui le suit dans le rang qui précède; au moyen des relations (a, b, ... m).

§. 3.

En substituant dans la formule (1.) pour a, b, c, etc. leurs valeurs déduites des relations (a.), nous trouverons la nouvelle série

$$(2.)\qquad S=\frac{\mu}{\mu+\lambda}a+\frac{1}{\mu+\lambda}(a'-b'+c'-\dots.$$

En mettant dans cette formule pour a', b', c', etc. leurs valeurs déduites des relations (b.), nous aurons

$$(3.)\qquad S=\frac{\mu}{\mu+\lambda}a+\frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}a'+\frac{1}{(\mu+\lambda)^2}(a''-b''+c''-\dots).$$



On trouvera de même à l'aide des relations ($c.$):

$$(4.)\qquad S = \frac{\mu}{\mu+\lambda}a + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}a' + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^3}a'' + \frac{1}{(\mu+\lambda)^3}(a''' - b''' + \cdots);$$

et généralement, on pourra former une multitude de séries dont la somme est egale à S, en prenant S égal à la somme d'autant de termes auxiliaires qu'on voudra, à la suite desquels on écrira la suite infinie des termes horizontaux qui suivent le terme auxiliaire auquel on s'est arrêté, avec leurs signes respectifs. C'est ainsi qu'on pourra écrire:

$$(m.)\qquad S = \frac{\mu}{\mu+\lambda}a + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}a' + \cdots + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^{m-1}}a^{(m-2)}$$
$$+ \frac{1}{(\mu+\lambda)^{m-1}}(a^{(m-1)} - b^{(m-1)} + c^{(m-1)} - \cdots).$$

En ne considérant de cette série que les termes auxiliaires, dont le nombre peut être supposé prolongé à l'infini, on obtient:

$$(A.)\qquad S = \frac{\mu}{\mu+\lambda}a + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}a' + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^3}a'' + \cdots$$

§. 4.

En supposant cette série *convergente*, et en y substituant pour a', a'', a''', etc. leurs valeurs données par les relations (a, b, c etc.), on obtient:

$$S = a - \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}b + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}b' + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^3}b'' + \cdots\right).$$

On trouvera de même au moyen de cette relation:

$$S = a - b + \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}c + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}c' + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^3}c'' + \cdots\right),$$

et de même:

$$S = a - b + c - \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}d + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^2}d' + \frac{\mu}{(\mu+\lambda)^3}d'' + \cdots\right),$$

et ainsi de suite.

§. 5.

En disposant convenablement des valeurs des quantités indéterminées λ et μ, on pourra obtenir pour la transformée en termes auxiliaires ($A.$), une série fort convergente; et lorsque la loi de ses termes sera facile à saisir, cette nouvelle série pourra être substituée à la série proposée (1.) et donne la valeur de S avec un grand degré d'approximation.

En supposant $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, les relations ($a$, b, c, etc. m) donnent:

$$\begin{array}{llll} a - a' = \frac{1}{2}b, & b - b' = \frac{1}{2}c, & c - c' = \frac{1}{2}d, & \text{etc.} \\ a' - a'' = \frac{1}{2}b', & b' - b'' = \frac{1}{2}c', & c' - c'' = \frac{1}{2}d', & \text{etc.} \\ a'' - a''' = \frac{1}{2}b'', & b'' - b''' = \frac{1}{2}c'', & c'' - c''' = \frac{1}{2}d'', & \text{etc.} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(m-1)} - a^{(m)} = \frac{1}{2}b^{(m-1)}, & b^{(m-1)} - b^{(m)} = \frac{1}{2}c^{(m-1)}, & c^{(m-1)} - c^{(m)} = \frac{1}{2}d^{(m-1)}, & \text{etc.,} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

par conséquent:

$$\begin{array}{l} a > a' > a'' > a''' \text{ etc.} \\ b > b' > b'' > b''' \text{ etc.} \\ c > c' > c'' > c''' \text{ etc.} \\ \dots \end{array}$$

Dans cette hypothèse la série (A.) peut être écrite:

$$(A'.) \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}a'' + \dots + \tfrac{1}{2}a^{(m)} + \dots.$$

Si par exemple nous considérons la série

$$(a.) \qquad S = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n+2\alpha} - \frac{1}{n+3\alpha} + \dots$$

nous aurons pour sa transformée en termes auxiliaires (A'.) la série suivante:

$$(b.) \quad S = \frac{1}{2n} + \frac{1.\alpha}{4n(n+\alpha)} + \frac{1.2.\alpha^2}{8n(n+\alpha)(n+2\alpha)} + \frac{1.2.3.\alpha^3}{16n(n+\alpha)(n+2\alpha)(n+3\alpha)} + \dots,$$

dont la loi de formation des termes est évidente et dont il est facile de déterminer la convergence en faisant le rapport d'un terme à celui qui le précède.

Genève, le 10 Decembre 1852.

25.

Methodus nova aequationem indeterminatam secundi gradus duas incognitas implicantem per numeros integros solvendi.

Dissertatio inauguralis.

(Auct. *Herm. Scheffler,* Brunsvicensis.)

Art. 1.

Solutio aequationis generalis indeterminatae secundi gradus duas incognitas implicantis

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + ey + f = 0$$

per numeros integros ad solutionem aequationis simplicioris

$$(2) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 = k,$$

cujus coëfficientes a, b, c, k sunt integri, reducitur. Nexum aequationum (1 et 2) omittentes, disquisitionem praesentem ad aeq. (2) restringimus.

Hanc aequationem (2) illustrissimus *Lagrange* primus resolvit (conf. additamenta *Lagrangiana* ad *Euleri* Algebram, in linguam Germanicam translata a *Kaussler,* 1796). Quamquam *completa,* et maxima laude digna, methodus *Lagrangiana* non omni respectu est *perfecta:* etenim non unica regula generalis pro diversis problematis casibus, immo vero regula peculiaris pro quoque trium casuum est data, quando *determinans* $b^2 - ac$ *formae binariae* $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est, aut numerus positivus non-quadratus, aut numerus negativus, aut numerus positivus quadratus; praeterea calculus pro casu difficiliore, ubi determinans est numerus positivus non-quadratus et multitudo solutionum infinita, prolixior est, elegantia caret et facultatis omnes incognitarum valores inter limites datos jacentes facile inveniendos non satis habet.

Clarissimus *Legendre* in libro „Essais sur la théorie des nombres, 1799" methodum *Lagrangianam* secutus est.

Principiis omnino diversis celeberrimus *Gauss* in opere classico „Disquisitiones arithmeticae, 1801" rem tractavit. Methodus aequationem propositam solvendi a viro ingeniosissimo exposita omnes casus, nisi determinans $b^2 - ac = 0$, sub regula communi amplectitur et ob rigorem ac generalitatem summis scientiae postulationibus plene satisfacit. Quae quum vero in formarum binariarum theoriam, partem Arithmeticae Sublimioris, innitatur, ideoque studium disciplinae subsidiariae latae et algorithmum copiosum requirat, *pro usu vulgari* methodus elementaris expedita adhuc est desideranda.

Fractiones continuae, jam a *Lagrange* saepius adhibitae, hunc ad finem aptissimae sunt. Earum auxilio ad methodum perveni, quae aequationis propositae solutiones pro quovis determinantis valore complete atque bono ordine, nihilo secius calculo simplicissimo suppeditat. Hanc methodum omni generalitate ac rigore hic tradere brevitas non permittit. Expositionem integram commentationi majori de Analysi Indeterminata *) reservans, in sequentibus ad eum solum casum respiciam, ubi determinans est numerus positivus nonquadratus. Quae restrictio eo magis licebit, cum casus designatus, infinita solutionum multitudine praeditus, omnium difficillimus sit, et reliquorum quisque secundum regulam specialem multo simpliciorem et jam diu notam resolvi possit. Praeterea angustum hujus opusculi spatium methodum novam potius describere, quam rigorose demonstrare me compellit.

Art. 2.

Designemus fractionem continuam $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \text{etc.}}}$

ubi quotientes $a_0, a_1, a_2 \ldots$ numeri integri positivi vel negativi (cifra non exclusa) brevitates causa per $[a_0, a_1, a_2 \ldots]$, totius fractionis *valorem reductum* per $K = \frac{M}{N}$, generaliterque *fractionem approquinquantem* aliquam, primos $n+1$ quotientes ab indice 0 usque ad indicem n implicantem, per

$$(3) \qquad [a_0, a_1, a_2 \ldots a_n] = K_n = \frac{M_n}{N_n}.$$

Fractionum appropinquantium successivarum numeratores ac denominatores M_n, N_n secundum formulam recursoriam

$$(4) \qquad M_n = a_n M_{n-1} + M_{n-2}, \qquad N_n = a_n N_{n-1} + N_{n-2}$$

---

*) Quae sumtibus librariae aulicae Helwingianae, Hannoverae, mox promulgabitur.

facillime sunt calculandi schemate hoc:

n	a_n	M_n	N_n
-2		$M_{-2}=0$	$N_{-2}=1$
-1		$M_{-1}=1$	$N_{-1}=0$
0	a_0	$M_0=a_0M_{-1}+M_{-2}$	$N_0=a_0N_{-1}+N_{-2}$
1	a_1	$M_1=a_1M_0+M_{-1}$	$N_1=a_1N_0+N_{-1}$
2	a_2	$M_2=a_2M_1+M_0$	$N_2=a_2N_1+N_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_n	$M_n=a_nM_{n-1}+M_{n-2}$	$N_n=a_nN_{n-1}+N_{n-2}$,

ex. gr. pro $K=[2, 3, 1, -5, 0, 6]$

n	a_n	M_n	N_n
-2		0	1
-1		1	0
0	2	2	1
1	3	7	3
2	1	9	4
3	-5	-38	-17
4	0	9	4
5	6	16	7.

Bini numeri M_n, N_n inter se semper erunt primi, semperque relatio valebit haec:

$$(5) \qquad M_nN_{n-1}-M_{n-1}N_n = (-1)^{n-1}$$

Annotamus, loco valoris 1 etiam valorem -1 pro M_{-1} et N_{-2} accipi posse, quo facto omnium quantitatum M, N signa in opposita commutantur.

Fractiones $\frac{M_n}{N_n}$, etsi appropinquantes dicuntur, non semper seriem convergentem, scilicet seriem terminorum continuo ad ultimae fractionis $\frac{M}{N}$ valorem propius accedentium, constituunt. Ut hac proprietate fruantur, quotientes certis conditionibus satisfacere debent. Convergentia sine dubio existet, si post aliquem indicem omnes quotientes signum positivum conservant et cifram non continent.

Si fractionem vulgarem $\frac{M}{N}$, positivam vel negativam, secundum regulam usitatam in fractionem continuam ita convertimus, ut per singulas divisiones integros maximos a_0, a_1, a_2 ..., sicut per primam $M:N$ integrum maximum a_0 infra $\frac{M}{N}$ situm, secernamus (seriei ... -2 -1 0 1 2 ... terminum quemque

praecedente *majorem* accipientes), omnes quotientes erunt positivi atque $\geqq 1$, excepto primo a_0, qui etiam aequalis cifrae vel negativus esse poterit. Nihil ceterum impedit, quominus arbitrarios quotientes nonnullos inseramus, hoc modo evolutionem in indefinitum extendamus, denique autem, ut calculus finem attingat, ad strictam integrorum maximorum legem redeamus. Exemplum conversionis fractionis $\frac{-5}{8}$ praecedentia illustrabit. Secundum regulam vulgarem habemus:

```
8 | -5 | -1
    -8
    ‾‾
     3 | 8 | 2
         6
         ‾
         2 | 3 | 1
             2
             ‾
             1 | 2 | 2
                 2
                 ‾
                 0
```

unde $\frac{-5}{8} = [-1, 2, 1, 2]$

n	a_n	M_n	N_n
-2		0	1
-1		1	0
0	-1	-1	1
1	2	-1	2
2	1	-2	3
3	2	-5	8.

Si vero pro quotientibus a_0, a_1 valores arbitrarios 3, 0 resp. assumimus, tumque demum regulam priorem adhibemus, fit:

```
8 | -5 | 3
    24
    ‾‾
   -29 | 8 | 0
         0
         ‾
         8 | -29 | -4
             -32
             ‾‾‾
               3 | 8 | 2
                   6
                   ‾
                   2 | 3 | 1
                       2
                       ‾
                       1 | 2 | 2
                           2
                           ‾
                           0
```

unde $\frac{-5}{8} = [3, 0, -4, 2, 1, 2]$

n	a_n	M_n	N_n
-2		0	1
-1		1	0
0	3	3	1
1	0	1	0
2	-4	-1	1
3	2	-1	2
4	1	-2	3
5	2	-5	8.

Art. 3.

Simili modo expressio irrationalis $R = \frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0}$ in fractionem continuam infinitam $[a_0, a_1, a_2 \ldots]$ quotientibus aut maximis aut arbitrariis evolvi potest. Supponendo esse

D, quem *determinantem* expressionis K appellabimus, numerum integrum positivum non-quadratum;

P_0 et Q_0 numeros integros quoslibet positivos vel negativos;

$D - P_0^2$ numerum per Q_0 divisibilem, sive $\frac{D-P_0^2}{Q_0} = Q_{-1}$ numerum integrum (quod semper eveniet substituendo, si necesse est, $\frac{\sqrt{(m^2 D)}+mP_0}{mQ_0}$ pro $\frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0}$); denique

radicem $\sqrt{D}$ quantitatem positivam (quod si non locum haberet, signis mutandis facile efficeretur):

Algorithmus sequens oritur:

$$Q_{-1} = \frac{D-P_0^2}{Q_0}$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0} = a_0 + \frac{1}{x_1} \quad \text{ubi} \quad P_0 = P_0 \qquad \text{et} \quad Q_0 = \frac{D-P_0^2}{Q_{-1}}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_1} = a_1 + \frac{1}{x_2} \qquad P_1 = a_0 Q_0 - P_0 \qquad Q_1 = \frac{D-P_1^2}{Q_0}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_2} = a_2 + \frac{1}{x_3} \qquad P_2 = a_1 Q_1 - P_1 \qquad Q_2 = \frac{D-P_2^2}{Q_1},$$

generaliter

$$(6) \qquad x_n = \frac{\sqrt{D}+P_n}{Q_n} = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

$$(7) \qquad P_n = a_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1}$$

$$(8) \qquad Q_n = \frac{D-P_n^2}{Q_{n-1}}.$$

Si quisque quotiens a_n non arbitrario, sed ita assumitur, ut integrum maximum infra x_n situm repraesentet, leges sequentes habemus: Omnes quotientes, excepto fortasse primo a_0, erunt positivi $\geqq 1$, unde convergentia fractionis continuae sequitur: in seriebus infinitis numerorum a, P, Q periodus communis occurret, qua attacta calculi ulterioris negotium cessat; omnes quantitates periodicae erunt positivae atque illae $a < 2\sqrt{D}$, illae $P < \sqrt{D}$, illae $Q < 2\sqrt{D}$; terni numeri P_n, Q_n, Q_{n-1} per formulam (8.) ita connectuntur,

ut valores determinati ipsorum P_n, Q_n valorem determinatum ipsius Q_{n-1} necessario postulent (idque etiam, si quotientes arbitarii sunt); unde patet, numeros Q praeter periodum communem, periodum specialem eadem quidem terminorum multitudine, attamen uno indice prius incipientem constituturos esse. Ecce exemplum.

Pro $K=\frac{\sqrt{37}-4}{3}$ habemus $Q_{-1}=7$ et evolutionem hanc:

$$x_0=\frac{\sqrt{37}-4}{3}=0+\frac{1}{x_1}$$
$$x_1=\frac{\sqrt{37}+4}{7}=1+\frac{1}{x_2}$$
$$x_2=\frac{\sqrt{37}+3}{4}=2+\frac{1}{x_3}$$
$$x_3=\frac{\sqrt{37}+5}{3}=3+\frac{1}{x_4}$$
$$x_4=\frac{\sqrt{37}+4}{7}=x_1$$
etc.

quare $K=[0, 1, 2, 3, 1, 2, 3\ldots]$

n	P_n	Q_n	a_n
-1		7	
0	-4	3	0
(1	4	7	1
2	3	4	2
3)	5	3	3
(4	4	7	1
5	3	4	2
6)	5	3	3
	etc.		

Quantitates $(-1)^n Q_n$, quae magni momenti sunt, manifesto periodos eadem aut duplice longitudine quam quantitates Q_n formant, prout multitudo terminorum periodi quantitatum Q_n est par aut impar. In casu posteriore series illarum $(-1)^n Q_n$ omnes valores periodicos illarum Q_n cum signo positivo simulque cum signo negativo continet; in casu priore contra series illarum $(-1)^n Q_n$ dimidium valorum periodicorum illarum Q_n alterum cum signo positivo, alterum cum signo negativo implicat.

Quando pro pluribus quotientibus valores arbitrarii introducuntur, dein autem lex integrorum maximorum perpetuo applicatur, quantitatum a_n, P_n, Q_n, $(-1)^n Q_n$ periodi tandem prodeuntes, prioribus exacte congruent. Ex periodi ipsarum $(-1)^n Q_n$ constantia sequitur, initialem periodi ipsarum Q_n indicem semper fore parem aut semper imparem, qualescunque sint quotientes primam periodum antegredientes, si quidem numerus terminorum hujus periodi *par* est. (In casu contrario, ubi numerus terminorum periodi ipsarum Q_n *impar* est, initialis ille index semper ad libitum par vel impar accipi potest, prout primae periodi quantitates pro periodicis admittuntur, an non.) Ponendo in exemplo praecedente quotientem a_0 arbitrario $=5$, tumque applicando vulgarem evolutionis legem evadit:

$x_0 = \frac{\sqrt{37}-4}{3} = 5 + \frac{1}{x_1}$

$x_1 = \frac{\sqrt{37}+19}{-108} = -1 + \frac{1}{x_2}$

$x_2 = \frac{\sqrt{37}+89}{73} = 1 + \frac{1}{x_3}$

$x_3 = \frac{\sqrt{37}-16}{-3} = 3 + \frac{1}{x_4}$

$x_4 = \frac{\sqrt{37}+7}{4} = 3 + \frac{1}{x_5}$

$x_5 = \frac{\sqrt{37}+5}{3} = 3 + \frac{1}{x_6}$

(hoc loco calculum priori congruum fieri apparet).

quare $K = [5, -1, 1, 3, 3, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3 \ldots]$

n	P_n	Q_n	a_n
-1		7	
0	-4	3	5
1	19	-108	-1
2	89	73	1
3	-16	-3	3
4	7	4	3
5	5	3	3
(6	4	7	1
7	3	4	2
8	5	3	3
	etc.		

Art. 4.

Inter quantitates P, Q et fractiones appropinquantes $\frac{M}{N}$ illius K hae relationes existunt:

$$(9) \quad Q_0 M_{n-1} M_{n-2} - P_0(M_{n-1} N_{n-2} + M_{n-2} N_{n-1}) - Q_{-1} N_{n-1} N_{n-2} = (-1)^{n-1} P_n$$

$$(10) \quad Q_0 M_{n-1}^2 - 2 P_0 M_{n-1} N_{n-1} - Q_{-1} N_{n-1}^2 = (-1)^n Q_n$$

quarum posterior maximi momenti est, cum aequationi propositae (2) statim assimulari possit.

Supponendo, quantitates Q_0, P_0, Q_{-1}, $(-1)^n Q_n$ in aeq. (10) valores determinatos ipsarum a, $-b$, $-c$, k ex aeq. (2) et quantitates M_{n-1}, N_{n-1} valores incognitarum x, y habere, propositio sequens valet: Si series numerorum $(-1)^n Q_n$, ex aliqua expressionis K evolutione prodiens, valorem k continet, manifesto duo numeri M_{n-1}, N_{n-1} inter se primi dantur, qui aequationi (10) satisfaciant; et vice versa, si duo numeri M_{n-1}, N_{n-1} inter se primi aequationi (10) satisfacientes dantur, valor k per quandam illius K evolutionem inter quantitates $(-1)^n Q_n$ reproduci poterit.

Art. 5.

Sint $K = \frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0}$ et $K' = \frac{\sqrt{D}+P'_0}{Q'_0}$ duae expressiones ejusdem determinantis D, ad quas pertineant evolutiones vulgares hae:

ad K				ad K'			
n	P_n	Q_n	a_n	n	P'_n	Q'_n	a'_n
-1		Q_{-1}		-1		Q'_{-1}	
0	P_0	Q_0	a_0	0	P'_0	Q'_0	a'_0
1	P_1	Q_1	a_1	1	P'_1	Q'_1	a'_1
$\vdots$				$\vdots$			
$r-1$	P_{r-1}	Q_{r-1}	a_{r-1}	$s-1$	P'_{s-1}	Q'_{s-1}	a'_{s-1}
r	P_r	Q_r	a_r	s	P'_s	Q'_s	a'_s
$r+1$	P_{r+1}	Q_{r+1}	a_{r+1}	$s+1$	P'_{s+1}	Q'_{s+1}	a'_{s+1}
$\vdots$				$\vdots$			

Si periodi illarum K, K' identicae sunt, pro indicibus quibusdam r, s aequationes

$$(11) \qquad P_r = P'_s, \qquad Q_r = Q'_s, \qquad Q_{r-1} = Q'_{s-1}$$

existent, et vice versa. Hac conditione expleta, ambae illae evolutiones toti modo combinari possunt, ut ab illius K evolutione termini tantum super lineam _____⌐‾‾‾‾ siti, retineantur, deinde loco quotientis a_r valor 0 ponatur, tum vero pro ceteris quantitatibus desecatis termini illius K' super lineam _____⌐‾‾‾‾ siti, serie tamen retrograda et signis illorum a' et P' conversis, substituantur. Quo facto, nova illius K evolutio nascitur haec:

n	P_n	Q_n	a_n
-1		Q_{-1}	
0	P_0	Q_0	a_0
1	P_1	Q_1	a_1
$\vdots$			
$r-1$	P_{r-1}	Q_{r-1}	a_{r-1}
r	P_r	Q_r	0
$r+1$	$-P'_s$	Q'_{s-1}	$-a'_{s-1}$
$r+2$	$-P'_{s-1}$	Q'_{s-2}	$-a'_{s-2}$
$\vdots$			
$n-2$	$-P'_3$	Q'_2	$-a'_2$
$n-1$	$-P'_2$	Q'_1	$-a'_1$
$r+s=n$	$-P'_1$	Q'_0	

Conjunctio ista, quam *combinationem* illarum K, K' vocabimus et accuratius per formulam

$$(12) \qquad K(r) \text{ comb. } K'(s)$$

denotabimus, indice $n = r + s$ ob eam causam interrupimus, ut quantitas $Q'_0 = Q_n$ in ultimo seriei termino appareat. Cum quotiens penultimus $a_{n-1} = -a'_1$ sit, valores pro M_{n-1}, N_{n-1} ex hac evolutione oriundos, a primo illius K' quotiente a' non pendere, perspicitur. Simulque patet, quantitatem $(-1)^n Q_n$ aequalem $+Q'_0$ aut aequalem $-Q'_0$ fore, quatenus $n = r + s$ est par, aut impar. Quando igitur periodus imparem terminorum multitudinem comprehendit, combinatio illius K et K', indicibus r, s rite selectis, semper ita fieri potest, ut $(-1)^n Q_n$ tum valorem $+Q'_0$, tum valorem $-Q'_0$, accipiat; quando autem multitudo illa par est, $(-1)^n Q_n$ unicum tantum valorum $+Q'_0$, $-Q'_0$ assumere potest.

Combinando ex. gr. evolutiones

$$K = \frac{\sqrt{37}-4}{3}$$

n	P_n	Q_n	a_n
-1		7	
0	-4	3	0
1	4	7	1
2	3	4	2
3	5	3	3
4	4	7	1
5	3	4	2
6	5	3	3

etc.

$$K' = \frac{\sqrt{37}+89}{73}$$

n	P'_n	Q'_n	a'_n
-1		-108	
0	89	73	1
1	-16	-3	3
2	7	4	3
3	5	3	3
4	4	7	1
5	3	4	2
6	5	3	3

etc.

quarum periodi identicae e ternis terminis compositae sunt, nanciscimur:

pro K (3) comb. K' (3)

n	P_n	Q_n	a_n
-1		7	
0	-4	3	0
1	4	7	1
2	3	4	2
3	5	3	0
4	-5	4	-3
5	-7	-3	-3
6	16	73	

pro K (1) comb. K' (4)

n	P_n	Q_n	a_n
-1		7	
0	-4	3	0
1	4	7	0
2	-4	3	-3
3	-5	4	-8
4	-7	-3	-3
5	16	73	

In combinatione anteriore est $(-1)^6 Q_6 = 73 = +Q'_0$, in posteriore contra, $(-1)^5 Q_5 = -73 = -Q'_0$.

Art. 6.

Duae evolutiones K et K' periodis identicis affectae ob infinitam earum extentionem modis infinite diversis combinari possunt, attribuendo indicibus r, s valores varios periodi longitudine inter se distantes, scilicet valores hos:

pro r valores $r,\ r+m,\ r+2m,\ r+3m\ \ldots$
pro s valores $s,\ s+m,\ s+2m,\ s+3m\ \ldots$

ubi m terminorum periodicorum numerum designat.

Gravissimum est, inter has combinationes eas eruere, quae *diversos* fractionum appropinquantium $\frac{M_{n-1}}{N_{n-1}}$ valores proferunt. Huc per lemma sequens pervenimus.

Si seriem quotientum fractionis continuae cujuscunque

$$K_{n-1} = [a_0,\ a_1\ \ldots\ a_{n-2},\ a_{n-1}]$$

per seriem $0,\ -a_{n-1},\ -a_{n-2}\ \ldots$ propagamus, fractiones appropinquantes $K_{n-2},\ K_{n-3},\ K_{n-4}\ \ldots$ paulatim se reproducent, sicut tabula docet haec:

n	a_n	M_n	N_n
$n-3$	a_{n-3}	M_{n-3}	N_{n-3}
$n-2$	a_{n-2}	M_{n-2}	N_{n-2}
$n-1$	a_{n-1}	M_{n-1}	N_{n-1}
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
n	0	M_{n-2}	N_{n-2}
$n+1$	$-a_{n-1}$	M_{n-3}	N_{n-3}
$n+2$	$-a_{n-2}$	M_{n-4}	N_{n-4}
	etc.		

Generaliter itaque est

$$(13)\qquad [a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ 0,\ -a_{n-1},\ -a_{n-2},\ \ldots\ -a_{n-m}] = [a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_{n-m-2}]$$

Porro patet, loco quotientis 0 in fractione continua ubicunque occurrentis series quaelibet hujusmodi:

$$b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_{m-2},\ b_{m-1},\ 0,\ -b_{m-1},\ -b_{m-2},\ \ldots\ -b_1,\ -b_0$$

intercalari posse, nullo mutato fractionis valore. Nam prout quotienti postremo a_{n-1} succedit, aut quotiens unicus 0, aut series modo scripta, fractiones approximantes ulteriores ita nascuntur:

aut ita:

$$\begin{array}{ccc} & M_{n-1} & N_{n-1} \\ 0 & M_{n-2} & N_{n-2} \end{array}$$

aut ita:

$$\begin{array}{ccc} & M_{n-1} & N_{n-1} \\ b_0 & M_n & N_n \\ \vdots & & \\ b_{m-1} & M_{n+m-1} & N_{n+m-1} \\ 0 & M_{n+m-2} & N_{n+m-2} \\ -b_{m-1} & M_{n+m-3} & N_{n+m-3} \\ \vdots & & \\ -b_1 & M_{n-1} & N_{n-1} \\ -b_0 & M_{n-2} & N_{n-2}; \end{array}$$

unde intelligitur, fractiones appropinquantes, et ultimas, et penultimas, in ambobus casibus easdem valores respective assumere. Si itaque fractio continua proposita per quotientem a_{n-1} non terminatur, pro fractionibus appropinquantibus inferioribus omnino aeque valebit, utrum inter illum quotientem a_{n-1} et proximum a_n valor 0, an series supra scripta interponatur.

Hinc colligimus, angustiorem *combinationis* (12) significationem ad ultimae fractionis approximantis valorem contrahentes, esse:

$$(14) \quad K(r)\,\text{comb.}\,K'(s) = K(r+vm)\,\text{comb.}\,K'(s+vm),$$

m multitudinem terminorum periodi et v numerum quemcunque integrum positivum vel negativum denotante, dummodo indices $r+vm$ et $s+vm$ intra periodos permaneant.

Accipiendo igitur ex periodis illarum K, K' omnino arbitrario electis duos indices r, s conditioni (11) respondentes, cunctae combinationes *diversae* repraesentantur per duas series sequentes:

$$(15) \quad K(r),\ (r+m),\ (r+2m)\ \dots\ \text{comb.}\,K'(s)$$

$$(16) \quad K(r)\ \text{comb.}\,K'(s),\ (s+m),\ (s+2m)\ \dots,$$

quarum initiales tantum combinationes inter se aequales sunt.

Si postuletur, valorem quantitatis $(-1)^n Q_n$ e quavis combinatione prodeuntis non $= -Q'_0$, sed ubique $= +Q'_0$ esse, numerus m semper erit par, amplectens, quando periodus parem terminorum multitudinem continet, unam solam periodum, quando vero periodus imparem terminorum multitudinem comprehendit, binas periodos. Praeterea indices r et s ita eligendi sunt, ut $r+s=n$ sit numerus par.

In exemplo art. praec., ubi periodus 3 terminos continet, habemus, ut semper $(-1)^n Q_n = +Q'_0 = 73$ sit, $m=6$. Tum sumendo $r=3$, $s=3$,

combinationes diversae inveniuntur per formulas

$$K\ (3),\ (9),\ (15),\ (21)\ \ldots\ \text{comb.}\ K'\ (3)$$
$$K\ (3)\ \text{comb.}\ K'\ (3),\ (9),\ (15),\ (21)\ \ldots,$$

sive, sumendo $r=1$, $s=7$, per formulas

$$K\ (1),\ (7),\ (13),\ (19)\ \ldots\ \text{comb.}\ K'\ (7)$$
$$K\ (1)\ \text{comb.}\ K'\ (7),\ (13),\ (19),\ (25)\ \ldots$$

Art. 7.

Agitur nunc de serierum (15 et 16) valoribus calculandis. Indagatio idonea ostendit, ambarum serierum terminos simul per unicam formulam recursoriam exhiberi posse.

Namque denotando per

$b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$ periodum quotientum expressionis K vel K', indici r vel s proxime succedentem; per

$$(17) \qquad \mathfrak{K} = [b_0, b_1, \ldots b_{m-1}]$$

fractionem continuam ex illis quotientibus compositam, cujus fractio appropinquans ultima et penultima est resp.

$$(18) \qquad \mathfrak{K}_{m-1} = \frac{\mathfrak{M}_{m-1}}{\mathfrak{N}_{m-1}} \qquad \mathfrak{K}_{m-2} = \frac{\mathfrak{M}_{m-2}}{\mathfrak{N}_{m-2}};$$

per

$$(19) \qquad h = \mathfrak{M}_{m-1} + \mathfrak{N}_{m-2}$$

summam ex numeratore fractionis appropinquantis ultimae et denominatore penultimae prodeuntem; denique per

(20)	(21)
$\dfrac{\overset{0}{M}}{\overset{0}{N}} = K(r)\ \text{comb.}\ K'(s)$	$\dfrac{\overset{0}{M}}{\overset{0}{N}} = K(r)\ \text{comb.}\ K'(s)$
$\dfrac{\overset{1}{M}}{\overset{1}{N}} = K(r+m)\ \text{comb.}\ K'(s)$	$\dfrac{\overset{-1}{M}}{\overset{-1}{N}} = K(r)\ \text{comb.}\ K'(s+m)$
$\dfrac{\overset{2}{M}}{\overset{2}{N}} = K(r+2m)\ \text{comb.}\ K'(s)$	$\dfrac{\overset{-2}{M}}{\overset{-2}{N}} = K(r)\ \text{comb.}\ K'(s+2m)$
. . . .	. . . .
$\dfrac{\overset{n}{M}}{\overset{n}{N}} = K(r+nm)\ \text{comb.}\ K'(s)$	$\dfrac{\overset{-n}{M}}{\overset{-n}{N}} = K(r)\ \text{comb.}\ K'(s+nm)$

serierum (15), (16) terminos successivos:

formula gravissima invenitur haec:

$$(22)\qquad \overset{n}{M} = h\overset{n-1}{M} + (-1)_{m-1}\overset{n-2}{M}$$

sive aequivalens:

$$(23)\qquad \overset{n}{M} = (-1)^{m} h\overset{n+1}{M} + (-1)^{m-1}\overset{n+2}{M}$$

Formula (22) sive (23), in qua pro n numerus quicunque positivus vel negativus admitti potest, omnes *numeratores* valorum ambarum serierum (20 et 21) complectitur.

Commutando litteram M cum N, ex eadem formula *denominatores* correspondentes prodeunt.

Pro usu praesente m semper valorem parem habebit, ideoque erit

$$(24)\qquad \overset{n}{M} = h\overset{n-1}{M} - \overset{n-2}{M}$$

sive

$$(25)\qquad \overset{n}{M} = h\overset{n+1}{M} - \overset{n+2}{M}.$$

Ad omnes serierum (20, 21) terminos investigandos, sufficit, praeter h quantitates $\overset{0}{M}$, $\overset{0}{N}$ et $\overset{1}{M}$, $\overset{1}{N}$ ex duabus primis seriei (20) combinationibus determinare, tumque reliquas quantitates quaesitas

seriei (20) per formulas:	seriei (21) per formulas:
$\overset{2}{M} = h\overset{1}{M} - \overset{0}{M}$	$\overset{-1}{M} = h\overset{0}{M} - \overset{1}{M}$
$\overset{3}{M} = h\overset{2}{M} - \overset{1}{M}$	$\overset{-2}{M} = h\overset{-1}{M} - \overset{0}{M}$
$\overset{4}{M} = h\overset{3}{M} - \overset{2}{M}$	$\overset{-3}{M} = h\overset{-2}{M} - \overset{-1}{M}$
etc.	$\overset{-4}{M} = h\overset{-3}{M} - \overset{-2}{M}$
	etc.

calculare. Principium, quod his seriebus inest, congruit eo, quo secundum formulam (4) numeratores ac denominatores valorum approximantium fractionum continuarum formantur, dummodo additiones in subtractiones convertantur, valores $\overset{0}{M}$, $\overset{0}{N}$, $\overset{1}{M}$, $\overset{1}{N}$ pro datis serierum terminis accipiantur et omnes quotientes $= h$ ponantur. Hoc modo ambae illae series ad unicam, ab utroque latere in infinitum procurrentem, conjungi et sub schemate sequente calculari possunt:

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$h\overset{-2}{M} = h\overset{-1}{M} - \overset{0}{M} \qquad\qquad \overset{-2}{N} = h\overset{-1}{N} - \overset{0}{N}$$

$$h\overset{-1}{M} = h\overset{0}{M} - \overset{1}{M} \qquad\qquad \overset{-1}{N} = h\overset{0}{N} - \overset{1}{N}$$

$$\overset{0}{M} \qquad\qquad \overset{0}{N}$$

$$\overset{1}{M} \qquad\qquad \overset{1}{N}$$

$$h\overset{2}{M} = h\overset{1}{M} - \overset{0}{M} \qquad\qquad \overset{2}{N} = h\overset{1}{N} - \overset{0}{N}$$

$$h\overset{3}{M} = h\overset{2}{M} - \overset{1}{M} \qquad\qquad \overset{3}{N} = h\overset{2}{N} - \overset{1}{N}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Pro exemplo art. 6 habemus:

K (3) comb. K' (3)

n	a_n	M_n	N_n
−2		0	1
−1		1	0
0	0	0	1
1	1	1	1
2	2	2	3
3	0	1	1
4	−3	−1	0
5	−3	4	1

itaque

$$\overset{0}{M} = 4, \qquad \overset{0}{N} = 1$$

K (9) comb. K' (3)

n	a_n	M_n	N_n
−2		0	1
−1		1	0
0	0	0	1
1	1	1	1
2	2	2	3
3	3	7	10
4	1	9	13
5	2	25	36
6	3	84	121
7	1	109	157
8	2	302	435
9	0	109	157
10	−3	−25	−36
11	−3	184	265

itaque

$$\overset{1}{M} = 184, \qquad \overset{1}{N} = 265$$

$$\mathfrak{K} = [1, 2, 3, 1, 2, 3]$$

n	b_n	$\mathfrak{M}_n$	$\mathfrak{N}_n$
−2		0	1
−1		1	0
0	1	1	1
1	2	3	2
2	3	10	7
3	1	13	9
4	2	36	25
$m-1=$ 5	3	121	84

itaque $\mathfrak{M}_{m-1} = 121$, $\mathfrak{N}_{m-2} = 25$, unde
$$h = 121 + 25 = 146.$$

Harum quantitatum auxilio valores illarum $\overset{n}{M}$, $\overset{n}{N}$ nanciscimur per calculum facillimum hunc:

n	h	$\overset{n}{M}$	$\overset{n}{N}$
⋮	⋮	⋮	⋮
−2	146	58396	−17375
−1	146	400	−119
0		4	1
1		184	265
2	146	26860	38689
3	146	3921376	5648329
⋮	⋮	⋮	⋮

Alios valores, quam eos in hacce serie pro $\overset{n}{M}$, $\overset{n}{N}$ contentos, nulla combinatio expressionum $K = \frac{\sqrt{37}-4}{3}$ et $K' = \frac{\sqrt{37}+89}{73}$ producere potest, si quidem ultima quantitas illarum $(-1)^n Q_n$ in quavis combinatione $= +Q'_0$ i. e. $= 73$ esse debet.

Art. 8.

Superest, ut quantitatis P'_0 mentionem faciamus. Numeris D et Q'_0 in expressione $K' = \frac{\sqrt{D}+P'_0}{Q'_0}$ valores datos tribuendo, scilicet numero D valorem determinantis expressionis K, numeroque Q'_0 valorem quendam ex serie quantitatum $(-1)^n Q_n$ illius K, numerus P'_0 pro incognito relinquitur. Itaque refert, omnes valores inquirere, quibus pro P'_0 substitutis expressio K' combinationes *diversas* cum illa K coëat.

Quum combinatio (12) nulla ratione a primo illius K' quotiente a'_0 pendeat, perspicuum est, ponendo $P'_0 = v\,Q'_0 + p$, hincque
$$K' = \frac{\sqrt{D}+P'_0}{Q'_0} = \frac{\sqrt{D}+p}{Q'_0} + v,$$
pro P'_0 eos solos numeros, positivos et negativos, qui absolute $\leqq \frac{1}{2} Q'_0$ sint, considerandos esse. Quoniam autem $\frac{D-P'^2_0}{Q'_0} = Q'_{-1}$ numerum integrum esse oportet, investigatio ad valores positivos illius P'_0 non majores quam $\frac{1}{2} Q'_0$, qui expressionem $D - P'^2_0$ per Q'_0 divisibilem reddant, reducitur. Substituendo

itaque in $D-P_0'^2$ pro P_1' numeros

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \tfrac{1}{2}Q_0' \qquad \text{si } Q_0' \text{ par est, aut}$$
$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \tfrac{1}{2}(Q_0'-1) \quad \text{si } Q_0' \text{ impar est,}$$

facili negotio valores quaesiti cognosci possunt. Quisque eorum, tum positive, tum negative acceptus, loco P_0' in expressionem K' introducendus est. Si pro pari illius Q_0' valore numerus $\frac{1}{2}Q_0'$ ipse inter valores quaesitos illius P_0' occurrat, $+\frac{1}{2}Q_0'$ et $-\frac{1}{2}Q_0'$ non diversas combinationes adducent, potius pro unico illius P_0' valore aestimandi erunt.

Exemplum. Sit $D=94$, $Q_0'=102$. Quum Q_0' par et $\frac{1}{2}Q_0'=51$, numeri

$$\begin{aligned} &94-0^2,\ 94-1^2,\ 94-2^2\ \ldots\ 94-51^2 \\ =\ &94,\qquad 93,\qquad 90\qquad \ldots\ -2507 \end{aligned}$$

examinandi sunt. Inter hos numeri soli $94-14^2=-102=-1.102$ et $94-20^2=-306=-3.102$ per 102 divisibiles inveniuntur. Quare valores quaesiti pro P' sunt 14, 20, -14, -20.

Quamvis simplicissimus hic calculus ad illius P_0' valores explorandos sit, commodior tamen methodus ex consideratione sequente colligitur.

Conditio

$$(26)\qquad \frac{D-P_0'^2}{Q_0'} = \text{numero integro}$$

aequivalet huic:

$$(27.)\qquad D-vQ_0' = P_0'^2 = \text{numero quadrato,}$$

ubi v numerum integrum quemcunque designat et pro Q_0' *positivus* valor illius Q_0' semper assumi potest. Denotando per v_0 *maximum* integrum *infra* $\frac{D}{Q_0'}$ situm (qui semper erit positivus aut aequalis cifrae) et per v_0 *minimum* integrum resp. *supra* $\frac{D-\left(\frac{Q_0'}{2}\right)^2}{Q_0'}$ aut *supra* $\frac{D-\left(\frac{Q_0'-1}{2}\right)^2}{Q_0'}$, prout Q_0' est par aut impar, situm (qui pro tempore positivus vel negativus vel aequalis cifrae esse potest) solum opus est, valorem illius v in aeq. (27) inter limites v_0 et v_1 variare. Quamobrem loco illius v, valores successivos

$$v_0\quad v_0-1\quad v_0-2\ \ldots\ v_1$$

in expressionem $D-vQ_0'$ substituimus et ex serie hoc modo prodeunte eos terminos eligimus, qui numeros quadratos $P_0'^2$ repraesentent. Haec regula multo expeditior est praecedente, quum, termino primo $D-v_0Q_0'$ calculato, singuli

termini posteriores usque ad ultimum $D - v_1 Q'_0$ *addendo* quantitatem Q'_0 ad priores facili negotio reperiantur. Insuper horum terminorum multitudo $v_0 - v_1$ nunquam valorem $\frac{1}{2}Q'_0$ egredi potest; ex quo intelligitur, multitudinem numerorum nunc calculandorum *dimidio minorem* esse, quam antea.

	v	$D - vQ'_0$
$v_0 =$	0	94
	-1	$196 = 14^2$
	-2	298
	-3	$400 = 20^2$
	-4	502
	-5	604
	$\vdots$	
	-23	2440
$v_1 =$	-24	2542

In exemplo praecedente habemus $D = 94$, $Q'_0 = 102$, ergo $\frac{1}{2}Q'_0 = 51$, porro $\frac{D}{Q'_0} = \frac{94}{102}$ et

$$\frac{D - (\frac{1}{2}Q'_0)^2}{Q'_0} = \frac{94 - 51^2}{102} = -24\frac{97}{102},$$ unde

$$v_0 = 0,\ v_1 = -24.$$

Hinc concluditur, tantummodo $v_0 - v_1 = 24$ numeros per additiones simplices formandos esse, quo contra calculus prior 51 numeros postulavit. Ceterum resultant hic pro P'_0 valores jam antea inventi ± 14 et ± 20.

Art. 9.

Methodus solvendi quaesita.

Ex praecedentibus methodum sequentem ad aequationem (2) solvendam derivamus.

Hac aequatione in formam

$$(28)\qquad ax^2 - 2bxy - cy^2 = k$$

posita, statuimus

$$(29)\qquad Q_0 = a,\quad P_0 = b,\quad Q_{-1} = c,$$

itaque

$$(30)\qquad D = b^2 + ac,\quad K = \frac{\sqrt{(b^2+ac)}+b}{a}$$

et expressionem K in fractionem continuam evolvimus.

Nunc valores x, y *inter se primi* ab iis, qui *divisorem communem* habent, distinguendi sunt.

Ad priores inveniendos accipimus

$$(31)\qquad (-1)^n Q_n = Q'_0 = k$$

et ponentes

$$(32) \qquad K' = \frac{\sqrt{D}+P'_0}{k},$$

pro P'_0 omnes valores absolute non majores quam $\frac{1}{2}k$, qui expressionem $D-P'^2_0$ per k divisibilem reddant, secundum art. 8 investigamus.

Si tales valores non darentur, resolutio per numeros inter se primos impossibilis foret. Si vero dantur, pro singulis expressionem K' in fractionem continuam convertimus, examinantes, utrum periodus alicujus K' periodo illius K congruat, et quidem tali modo, ut summa $r+s$ duorum terminorum correspondentium r, s valorem *parem* habeat.

Si nulla evolutio K' huic conditioni satisfaceret, solutiones expectatae abessent. Sin autem nonnullae hujusmodi adsunt, quaeque earum infinitam solutionum quaesitarum seriem producet, ad quam constituendam combinationes illius K cum K' secundum regulam art. 7 uno tenore perficiendae sunt.

Hoc modo solutiones quaesitae sub forma

$$(33) \qquad M = x, \qquad N = y$$

reperiuntur.

Omnes valores ita pro x, y inventi etiam cum signis oppositis aequationi propositae respondent.

Quod attinet ad solutiones x, y *divisorem communem aliquem* d habentes, ut existere possint, aequationis propositae membrum constans k manifesto factorem quadratum d^2 involvere debet.

Numero igitur k successive a quoque factorum suorum quadratorum d^2 liberato, aequationes singulas

$$(34) \qquad ax'^2 - 2bx'y' - cy'^2 = \frac{k}{d^2}$$

secundum praecepta antecedentia pro x', y' solvimus, denique ponentes

$$(35) \qquad x = dx', \qquad y = dy'$$

Art. 10.

Exemplum.

Proposita sit aequatio

$$7x^2 - 18xy + 10y^2 = 7$$

ut resolvatur. Hic est $Q_0 = a = 7$, $P_0 = b = 9$, $Q_{-1} = c = -10$, unde $D = 9^2 + 7(-10) = 11$, $K = \frac{\sqrt{11}+9}{7}$. Pro istius K evolutione in fractionem continuam habetur:

n	P_n	Q_n	a_n
-1		-10	
0	8	7	1
1	-2	1	1
(2	3	2	3
3)	3	1	6
4	3	2	3

etc.

Quum porro $Q'_0 = k = 7$ sit, e numeri P'_0 absolute non majores quam $\frac{1}{2}(Q'_0 - 1) = 3$, qui expressionem $11 - P'^2_0$ per 7 divisibilem reddant, auquales ± 2 inveniantur, pro K' duo valores $\frac{\sqrt{11}+2}{7}$ et $\frac{\sqrt{11}-2}{7}$ considerandi sunt. Prior valor evolutionem suppeditat hanc:

n	P'_n	Q'_n	a'_n
-1		1	
0	2	7	0
1	-2	1	1
(2	3	2	3
3)	3	1	6
4	3	2	3

etc.

cujus periodus, binos terminos amplectens, cum ea illius K ita congruit, ut combinationes

K (2), (4), (6), (8) ... comb. K' (2), (4), (6), (8) ...

formari possunt. Ad quod efficiendum habemus:

pro K (2) comb. K' (2)

n	a_n	M_n	N_n
-2		0	1
-1		1	0
0	1	1	1
1	1	2	1
2	0	1	1
3	-1	1	0

qnare $\overset{0}{M} = 1$, $\overset{0}{N} = 1$

pro K (4) comb. K' (2)

n	a_n	M_n	N_n
-2		0	1
-1		1	0
0	1	1	1
1	1	2	1
2	3	7	4
3	6	44	25
4	0	7	4
5	-1	37	21

qnare $\overset{1}{M} = 37$, $\overset{1}{N} = 21$

Pro quantitate h ex

$$\mathfrak{K} = [3, 6]$$

n	a_n	$\mathfrak{M}_n$	$\mathfrak{N}_n$
−2		0	1
−1		1	0
0	3	3	1
$m-1=1$	6	19	6

valor $h = \mathfrak{M}_{m-1} + \mathfrak{N}_{m-2} = 19 + 1 = 20$ reperitur. Ejus auxilio primam solutionum seriem nanciscimur, quae sub schemate sequente in ambo latera ad libitum extendi potest.

n	h	$\overset{n}{M} = x$	$\overset{n}{N} = y$
−5	20	−2707577	−3334821
−4	20	−135719	−167160
−3	20	−6803	−8379
−2	20	−341	−420
−1	20	−17	−21
0		1	0
1		37	21
2	20	739	420
3	20	14743	8379
4	20	294121	167160
5	20	5867677	3334821

Ad alterum illius K' valorem $\frac{\sqrt{11}-2}{7}$ pertinet evolutio

n	P'_n	Q'_n	a_n
−1		1	
0	−2	7	0
1	2	1	5
(2	3	2	3
(3	3	1	6
4	3	2	3

etc.

cujus periodus itidem ei illius K aequipollet. Itaque, ad combinationes

K (2), (4), (6), (8) ... comb. K' (2), (4), (6), (8) ...

perficiendas, habemus:

pro K (2) comb. K' (2)

n	a_n	M_n	N_n
−2		0	1
−1		1	0
0	1	1	1
1	1	2	1
2	0	1	1
3	−5	−3	−4

ergo $\overset{0}{M} = -3$, $\overset{0}{N} = -4$

pro K (4) comb. K' (2)

n	a_n	M_n	N_n
−2		0	1
−1		1	0
0	1	1	1
1	1	2	1
2	3	7	4
3	6	44	25
4	0	7	4
5	−5	9	5

ergo $\overset{1}{M} = 9$, $\overset{1}{N} = 5$

Notabile est, quantitatem h, ex terminis periodicis illius K prodeuntem, pro omnibus solutionum seriebus eundem valorem, qui nunc $= 20$, invariabiliter retinere. Hinc secunda solutionum series sequitur ista:

n	h	$\overset{n}{M} = x$	$\overset{n}{N} = y$
−3	20	−27471	−33835
−2	20	−1377	−1696
−1	20	−69	−85
0		−3	−4
1		9	5
2	20	183	104
3	20	3651	2075
4	20	72837	41396

Hae solutiones, sicut priores, etiam cum signis oppositis sumi possunt. Sed praeter valores illorum x, y hoc modo inventos, alii *inter se primi* existere nequeunt. Valorem autem *mensuram communem* implicantes in exemplo praesente omnino impossibiles sunt, quoniam membrum constans 7 nullum factorem quadratum (praeter 1) involvit.

Brunsvigae, mense Majo 1852.

26.

Über ein *Euler*sches Integral.

(Von Herrn Dr. phil. *Dedekind* zu Braunschweig.)

Die von *Gaufs* und *Legendre* in die Analysis eingeführten Functionen Π und Γ stehen bekanntlich in dem Zusammenhange, dafs $\Gamma(a)$ mit $\Pi(a-1)$ identisch ist, so lange a einen positiven Werth hat; für negative a ist $\Gamma(a)$ stets unendlich grofs, während $\Pi(a-1)$ eine bestimmte Function bleibt und nur dann unendlich und unstetig wird, wenn a einen der Werthe 0, -1, -2 u. s. w. erhält. Die Function Π wird als unendliches Product, Γ als bestimmtes Integral definirt. Unstreitig ist die erstere Definition umfassender, und gewährt eine tiefere Einsicht in das wahre Wesen dieser Functionen; indessen ist es für die Integralrechnung wichtig, ohne Hülfe jener Entwickelungen in unendliche Producte und Reihen, selbstständig eine Theorie dieser Functionen aufzustellen. Dies ist auch in der That nach und nach vollständig gelungen, seitdem namentlich *Dirichlet* (im 15. Bande dieses Journals) das berühmte Multiplicationstheorem von *Gaufs* so elegant bewiesen hat. In dieser Abhandlung wird auch der Lehrsatz

$$\Pi(a-1).\Pi(-a)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

angewendet, für welchen sehr verschiedene Beweise von verschiedenen Mathematikern gegeben sind, die aber fast alle ihren Weg über Entwickelungen in unendliche Reihen nehmen. In meiner, Ostern 1852 gedruckten Inaugural-Dissertation (Über die Elemente der Theorie der *Euler*schen Integrale) sind die hauptsächlichsten zusammengestellt; auch habe ich schon dort einen neuen Weg hinzugefügt, welcher sich ganz im Gebiete der bestimmten Integrale hält, dem ich aber eine vollkommene Strenge nur dadurch zu verleihen vermochte, dafs ich die Entstehung dieses Integrals aus der Multiplication von $\Pi(a-1)$ und $\Pi(-a)$, und den Ausdruck für $\frac{d\log\Pi(a)}{da}$ als bekannt voraussetzte. Im Folgenden soll nun ein, zwar auf ganz derselben Idee beruhender, aber von andern Theorieen ganz unabhängiger Beweis gegeben werden, der nur die allgemeinsten Sätze über die bestimmten Integrale zu Hülfe nimmt.

Zuerst mufs an einen Hülfssatz erinnert werden, der nachher einige Male gebraucht wird. Es ist bekanntlich

$$\int \frac{dw}{(aw+\beta)(\alpha' w+\beta')} = \frac{\log\left(\frac{aw+\beta}{\alpha' w+\beta'}\right)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

wo die Logarithmen hyperbolische sind. Sind nun $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta'}{\alpha'}$ positive Gröfsen, so folgt hieraus

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(aw+\beta)(\alpha' w+\beta')} = \frac{\log\frac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

oder, wenn der Logarithme immer nur von dem absoluten Werthe genommen wird:

$$(1.) \quad \int_0^\infty \frac{dw}{(aw+\beta)(\alpha' w+\beta')} = \frac{\log(\alpha\beta')-\log(\alpha'\beta)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta};$$

und diese Gleichung gilt selbst für den Fall, in welchem $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}$ ist, wenn man den unter die Form $\frac{0}{0}$ tretenden Werth nach den Regeln der Differentialrechnung behandelt.

Gehen wir nun zu dem eigentlichen Gegenstande über, so ist erstens leicht zu sehen, dafs das gegebene Integral

$$(2.) \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1} = A = \varphi(a)$$

nur dann einen endlichen, und zwar positiven Werth hat, wenn a ein positiver echter Bruch ist. Zerlegt man nämlich das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0, 1 und 1, ∞, und schreibt im Letztern $\frac{1}{x}$ statt x, so findet man

$$(3.) \quad A = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{-a}}{x+1}\,dx.$$

Da nun im ganzen Intervalle der Integration $\frac{1}{x+1}$ zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, so liegt auch A zwischen den Grenzen

$$\int_0^1 (x^{a-1}+x^{-a})\,dx \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x^{a-1}+x^{-a})\,dx.$$

Dieses Integral hat aber nur dann einen endlichen und positiven Werth, $=\frac{1}{a(1-a)}$, wenn a ein positiver echter Bruch ist. Dieselbe Bedingung ist daher auch für die Endlichkeit des Integrals A nöthig.

Ferner ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung (3.) der Satz

$$(4.)\qquad \varphi(a) = \varphi(1-a).$$

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf a, und setzt dann $a=\frac{1}{2}$, so findet man

$$(5.)\qquad \varphi'(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Da ferner, wie leicht zu sehen, $\varphi''(\frac{1}{2})$ positiv ist, so erreicht $\varphi(a)$ für $a=\frac{1}{2}$ einen Minimumwerth

$$(6.)\qquad \varphi(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{x+1} = 2\int_0^\infty \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = \pi.$$

Bezeichnet w eine positive Gröfse, so erhält man, wenn man in der Gleichung (2.) $\frac{x}{w}$ statt x schreibt:

$$(7.)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+w} = Aw^{a-1},$$

und wenn man $\frac{1}{w}$ statt w setzt,

$$(8.)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{xw+1} = Aw^{-a}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (7.) mit $\frac{dw}{w+1}$, integrirt in Bezug auf w zwischen den Grenzen 0 und ∞, und bedenkt, dafs zufolge, des Hülfssatzes (1.),

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(w+1)(w+x)} = \frac{\log x}{x-1}$$

ist, so erhält man

$$AA = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x-1}\log x.$$

Integrirt man jetzt in Bezug auf a zwischen den Grenzen $(1-a)$ und a, so erhält man

$$\int_{1-a}^a AAda = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{x-1}dx = \int_0^\infty \frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1}dw.$$

Subtrahirt man die Gleichung (8.) von (7.), so findet man leicht:

$$A\frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}(x-1)}{(xw+1)(w+x)}dx,$$

und wenn man zwischen den Grenzen $w=0$ und $w=\infty$ integrirt und

erwägt, dafs

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(xw+1)(w+x)} = \frac{2\log x}{xx-1}$$

ist, so folgt unmittelbar:

$$A\int_{1-a}^a AA\,da = A\int_0^\infty \frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1}dw = 2\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1}\log x.$$

Zufolge der Eigenschaft von A, dafs $A=\varphi(a)=\varphi(1-a)$ ist, ergiebt sich aber

$$\int_{a-1}^a AA\,da = 2\int_{\frac{1}{2}}^a AA\,da.$$

Ferner ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1}\log x = \frac{dA}{da},$$

und so erhält man endlich die Gleichung

$$A\int_{\frac{1}{2}}^a AA\,da = \frac{dA}{da},$$

aus welcher sich durch Division mit A und Differentiation in Bezug auf a die folgende ableiten läfst:

$$AA = \frac{1}{A}\frac{ddA}{da^2} - \frac{1}{AA}\left(\frac{dA}{da}\right)^2.$$

Da in derselben die unabhängige Variable a nicht vorkommt, so führe man $\frac{dA}{da}=A'$ als neue Variabel ein. Dies giebt

$$AA = \frac{A'dA'}{AdA} - \frac{A'A'}{AA}; \qquad AdA = \frac{AA.A'dA' - A'A'.AdA}{A^4}$$

oder

$$d(AA) = \frac{AA.d(A'A') - A'A'.d(AA)}{(AA)^2}$$

und das Integral dieser Gleichung ist offenbar

$$AA = \text{Const.} + \frac{A'A'}{AA} = \text{Const.} + \frac{1}{AA}\left(\frac{dA}{da}\right)^2.$$

Um die Constante zu bestimmen, setze man $a=\frac{1}{2}$, wofür nach Gleichung (5. und 6.) $\frac{dA}{da}=0$ und $A=\pi$ ist; daraus folgt $\pi\pi$ als Werth der Constante, und

$$da = \pm\frac{dA}{A\sqrt{(AA-\pi\pi)}} = \mp\frac{1}{\pi}\frac{d\left(\frac{\pi}{A}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{\pi\pi}{AA}\right)}}.$$

Bezeichnet man mit c eine Constante, so ergiebt sich

$$a+c=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\pi}{A},\qquad A=\frac{\pi}{\cos(a+c)\pi}.$$

Um die Constante c zu finden, setze man wieder $a=\frac{1}{2}$, woraus

$$1=\cos(\tfrac{1}{2}\pi+c\pi)=-\sin c\pi;\qquad \cos c\pi=0$$

und

$$\cos(a+c)\pi = \sin a\pi$$

folgt. Man erhält daher

$$A=\frac{\pi}{\sin a\pi};$$

was zu beweisen war. Aufserdem ergeben sich aus diesem Beweise sehr leicht noch mehre verwandte Integrale; was ich hier nicht weiter ausführe.

Braunschweig im September 1852.

27.

Aufgaben und Lehrsätze.

(Vom Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.)

---

1. „*Sind in einer Ebene zwei begrenzte Gerade AB und CD in beliebiger fester Lage gegeben, so besteht der Ort desjenigen Puncts, aus welchem dieselben unter gleichen Winkeln (oder auch unter Winkeln, die zwei Rechte betragen) gesehen werden, aus zwei Curven dritten Grads.*" Beide Curven gehen durch die vier Endpuncte der gegebenen Geraden, so wie durch ihren gegenseitigen Schnittpunct. Ferner haben die Curven diejenigen zwei Puncte gemein, aus welchen beide Geraden unter rechten Winkeln erscheinen. Die zwei übrigen gemeinschaftlichen Puncte der Curven sind imaginär und liegen auf der unendlich entfernten Geraden. Der Satz umfafst viele, theils interessante specielle Fälle, welche unter besondern Annahmen rücksichtlich der gegenseitigen Lage und der Gröfse der beiden Geraden eintreten.

2. „*Hat man in einer Ebene zwei ähnliche Curven dritten Grads, C^3 und C_1^3, deren homologe Dimensionen sich verhalten wie 2:1, hält die eine, etwa C^3, in ihrer Lage fest, so kann die andere auf 24 verschiedene Arten so gelegt werden, dafs beide Curven direct (nicht symmetrisch) ähnlich liegen, und einander in irgend einem Paar homologen Puncten m und m_1, und nebstdem noch in irgend zwei nicht homologen Puncten n und q_1 berühren.*" „*Durch die 24 Puncte m in der Curve C^3 können Curven 8ten Grads gehen; und eben so durch die 24 m_1 in C_1^3.*"

3. „*In einer beliebigen Curve dritten Grads giebt es, im Allgemeinen, 36 Paare parallele gleiche und gleichliegende Krümmungs-Halbmesser.*" — „*Wieviele Paare parallele gleiche aber ungleichliegende Krümmungs-Halbmesser giebt es in derselben Curve?*"

Wird eine Gerade AB von einer Curve dritten Grads, C^3, im Puncte A berührt und im Puncte B geschnitten, so soll die Strecke AB schlechthin *die Tangente* der Curve und die Richtung von A nach B ihre *Richtung* genannt werden. Die Mitte der Tangente heifse M. Zwei parallele Tangenten AB und A_1B_1 heifsen *gleichliegend* oder *ungleichliegend*, je nachdem ihre Rich-

tungen *gleich* oder *entgegengesetzt* sind; die ihre Berührungspuncte verbindende Gerade oder Berührungssehne AA_1, heifse 𝔖 und ihre Mitte heifse N. Jede Gerade, welche von der Curve C^3 in drei solchen Puncten A, B, C geschnitten wird, dafs der mittlere B gerade in der Mitte zwischen den äufsern A und C liegt, soll hier *Sehne* oder S heifsen. Gleiche Sehnen $S = S_1$, sind solche, in denen die drei Schnittpuncte gleichweit von einander abstehen, so dafs $AB = BC = A_1B_1 = B_1C_1$. Mit Bezug hierauf lassen sich folgende acht Sätze und Aufgaben (4. bis 11.) einfacher aussprechen.

4. *„Eine beliebige Curve dritten Grads, C^3, hat, im Allgemeinen, 18 Paar parallele gleiche aber ungleichliegende Tangenten, und die Mitten N ihrer 18 Berührungssehnen 𝔖 liegen in einem bestimmten Kegelschnitte E^2."*

5. *„Wieviele Paare parallele gleiche und gleichliegende Tangenten hat dieselbe C^3?"*

6. *„Wieviele solche Paare Tangenten hat dieselbe Curve C^3, welche gegenseitig einander hälften?"*

7. *„In derselben gegebenen Curve C^3 giebt es, im Allgemeinen, 9 Paar parallele gleiche Sehnen, $S = S_1$ oder $ABC = A_1B_1C_1$; und die Mitten, etwa N_1, der 9 Geraden BB_1, welche die mittlern Puncte der Sehnenpaare verbinden, liegen in dem nämlichen, vorgenannten (4.), Kegelschnitte E^2."*

8. *„In derselben Curve C^3 giebt es ferner 9 solche besondere Sehnen $ABC = S$, bei welchen die den Schnittpuncten A, B, C zugehörigen drei Tangenten A_0, B_0, C_0 einander in irgend einem Puncte treffen; dabei ist die Tangente B_0, im mittlern Puncte B, zugleich ein Durchmesser der Curve C^3, und zudem berühren alle 9 Tangenten B_0 den nämlichen genannten Kegelschnitt E^2."*

9. *„Der Ort der Mitten M aller Tangenten AB einer beliebigen Curve C^3 ist eine Curve 15ten Grads, M^{15}, welche die Basis C^3 in ihren 9 Wendepuncten, so wie in ihren drei unendlich entfernten Puncten berührt, oder vielmehr, welche die 9 Wendepuncte sammt den zugehörigen Wendetangenten, so wie die drei Asymptoten mit C^3 gemein, aber zudem die drei unendlich entfernten Puncte der letztern zugleich zu fünffachen Puncten hat."* — Nimmt man auf den Verlängerungen der Tangente AB einerseits den Punct M_1 so, dafs $AB = BM_1$, und andererseits den Punct M_2 so, dafs $BA = AM_2$ ist: *so sind die Örter dieser beiden*

Puncte M_1 und M_2 ebenfalls Curven 15ten Grads, M_1^{15} und M_2^{15}, welche sich gegen die Basis C^3 ähnlich verhalten, wie die Curve M^{15}.

10. „*Der Ort der Berührungssehne $\mathfrak{S}$ aller Paare parallelen Tangenten einer beliebigen Curve C^3 ist eine Curve 9ter Classe $\mathfrak{S}^9$ und 36ten Grads; und der Ort der Mitte N der Berührungssehne $\mathfrak{S}$ ist eine Curve 12ten Grads N^{12}.*" Diese beiden Ortscurven haben gleichfalls eigenthümliche Beziehung zu der Basis C^3, wie die vorigen. „*Es kann keine zwei Berührungssehnen $\mathfrak{S}$ geben, die einander hälften.*"

11. „*Der Ort aller Sehnen S in der beliebigen Curve C^3 ist eine Curve 6ter Classe und 18ten Grads.*"

Bekannten Sätzen über die Kegelschnitte gewissermafsen analog, hat man rücksichtlich der Curven dritten Grads folgende zwei Sätze (12. und 13.).

12. I. „*Zieht man aus irgend einem festen Pol P in der Ebene einer gegebenen Curve dritten Grads, C^3, beliebige Transversalen durch die letztere und legt in den je drei Schnittpuncten die Tangenten an C^3, welche einander paarweise in irgend drei Puncten Q schneiden, so ist der Ort dieser Puncte Q eine Curve 9ten Grads, Q^9, welche, unter andern, folgende interessante Eigenschaften hat.* 1) *Sie hat drei dreifache Puncte, Q_3, die in einer Geraden A_0 liegen; ihre 27 gemeinschaftlichen Puncte mit der Basis C^3 bestehen:* 2) *in 6 Schnitten A, welche in irgend einem Kegelschnitte A^2 liegen;* 3) *in 6 Berührungspuncten B (die für 12 gemeinschaftliche Puncte zählen), durch welche irgend ein Kegelschnitt B^2 geht;* 4) *in 9 Schnitten $3D$, $3E$ und $3F$, die zu drei in drei Geraden D_0, E_0 und F_0 liegen;* 5) *die genannten Kegelschnitte A^2 und B^2 berühren einander doppelt, und jene Gerade A_0* (1) *ist zugleich ihre Berührungssehne; und endlich* 6) *die vier Geraden A_0, D_0, E_0 und F_0 schneiden einander in einem und demselben Puncte.*" Ferner: „*Bewegt sich der Pol P in einer beliebigen Geraden G, so beschreiben die vier Geraden A_0, D_0, E_0 und F_0 beziehlich vier Kegelschnitte A_0^2, D_0^2, E_0^2 und F_0^2, wovon jeder der drei letztern die Basis C^3 in irgend drei Puncten berührt,* u. s. w."

II. „*Liegt der Pol P insbesondere in der Basis C^3 selbst, wobei also die Transversale in nur zwei veränderlichen Puncten schneidet und somit nur der Schnitt Q von den zwei zugehörigen Tangenten in Betracht kommt, so ist der Ort dieses Schnittes Q nur noch eine Curve 4ten Grads, Q^4, welche drei Doppelpuncte hat, die in der Basis C^3*

liegen." — „*Bewegt sich der Punct P längs der ganzen Basis* C^3, *so ist die entstehende Schaar Curven* Q^4 *so beschaffen, dafs jede beliebige Gerade in der Ebene von je 30 derselben berührt wird.*"

13. „*Aus jedem Puncte P in der Ebene einer Curve dritten Grads* C^3 *gehen 6 Tangenten an dieselbe, deren Berührungspuncte, paarweise verbunden, 15 Berührungssehnen* 𝔖 *bestimmen. Bewegt sich der Pol P in irgend einer Geraden G, so berühren die 15* 𝔖 *stets irgend eine und dieselbe Curve* 9ter *Classe* $𝔖^9$, *welche allemal mit der Basis* C^3 *die 9 Wendepuncte und zugehörigen Wendetangenten gemein hat, u. s. w.*" Wie man bemerken wird, ist dieser Satz im Grunde mit dem obigen (10.) identisch, indem durch Projection der eine in den andern übergeht.

14. *Die den beiden vorstehenden Sätzen* 12. *und* 13. *analogen Sätze bei der Curve vierten Grads aufzufinden.*

15. „*Man denke sich in einer Ebene beliebige 6 Puncte p, oder ein vollständiges Sechseck. Die Mitte jeder der 15 Seiten heifse a, und der Mittelpunct des durch je 5 der 6 Puncte p bestimmten Kegelschnitts heifse b. Durch je 4 der 6 Puncte p gehen zwei solche Kegelschnitte, deren Mittelpuncte in der durch die beiden übrigen Puncte p bestimmten Seite liegen; jeder dieser Mittelpuncte heifse c. Die auf diese Weise bestimmten Puncte sammt den 6 Puncten p, was zusammen* $6p+15a+6b+30c=57$ *Puncte ausmacht, liegen allemal in irgend einer Curve fünften Grads.*" „*Die Gleichung dieser Curve aufzustellen.*" — Wenn die gegebenen 6 Puncte p insbesondere in einem Kegelschnitte C^2 liegen, so fallen die 6 Mittelpuncte b in einen zusammen, der dann ein Doppelpunct der Curve C^5 ist. Welche Beziehung haben die beiden Tangenten in diesem Doppelpuncte zu jenem Kegelschnitte C^2?

16. *Sind in einer Ebene beliebige 6 Puncte p gegeben und man legt an den durch je 5 derselben gehenden Kegelschnitt aus dem jedesmaligen sechsten Puncte die beiden Tangenten, und bezeichnet jeden Berührungspunct derselben durch a; denkt sich ferner durch je 4 der 6 Puncte p diejenigen beiden Kegelschnitte beschrieben, welche die durch die zwei übrigen Puncte p gehende Gerade berühren, und bezeichnet jeden dieser Berührungspuncte durch b: so liegen die auf diese Weise bestimmten 42 Puncte, nämlich* $12a$ *und* $30b$, *allemal in irgend einer Curve* 6ten *Grads, welche die gegebenen 6 Puncte p zu Doppelpuncten hat.*" „*Die Gleichung dieser Curve zu finden.*"

17. „*Sind in einer Ebene 7 beliebige Puncte p gegeben und man legt durch je 5 derselben den durch sie bestimmten Kegelschnitt, und bezeichnet dessen Schnitte mit der durch die jedesmaligen zwei übrigen Puncte p gehenden Geraden durch a: so liegen die hierdurch bestimmten 42 Puncte a allemal in irgend einer Curve 6ten Grads, welche die gegebenen 7 Puncte p zu Doppelpuncten hat.*" „*Die Gleichung dieser Curve aufzustellen.*"

18. „*Soll eine Curve dritten Grads durch gegebene 6 Puncte a gehen und einen Doppelpunct d haben, dessen zugehörige Tangenten beziehlich durch zwei andere gegebene Puncte b und c gehen: so finden, im Allgemeinen, 25 Lösungen statt.*"

19. „*Soll eine Curve dritten Grads durch gegebene 7 Puncte a gehen und einen Doppelpunct d haben, dessen eine Tangente durch einen gegebenen achten Punct b geht: so giebt es, im Allgemeinen, 18 Lösungen.*"

20. „*Soll eine Curve dritten Grads durch 6 gegebene Puncte a gehen und einen Rückkehrpunct r haben, dessen Tangente durch einen gegebenen siebenten Punct b geht: so finden, im Allgemeinen, 18 Lösungen statt.*"

21. „*Über einer gegebenen Grundlinie ab, deren Endpuncte in einer gegebenen Curve dritten Grads liegen, lassen sich dieser Curve fünf Parallelogramme einschreiben. Die fünf Puncte, in denen die Diagonalen der einzelnen Parallelogramme sich kreuzen, liegen mit der Mitte der Grundlinie ab allemal in irgend einem Kegelschnitte.*" Oder:

„*Zu jeder beliebig angenommenen Sehne ab in einer gegebenen Curve dritten Grads giebt es, im Allgemeinen, fünf andere Sehnen, die ihr gleich und parallel sind, und die Mitten solcher sechs Sehnen liegen allemal in irgend einem Kegelschnitte.*" Jede der 6 Sehnen schneidet die gegebene Curve noch in einem dritten Puncte, und diese 6 Puncte liegen ebenfalls in einem Kegelschnitte, welcher zu dem eben genannten eigenthümliche Beziehung hat. Läfst man die Sehnen unendlich klein werden, d. h. in Tangenten übergehen, so geht der vorstehende Satz in einen bekannten Satz über.

22. Zieht man durch einen festen Punct p in einer gegebenen Curve 3ten Grads C^3 eine veränderliche Transversale, welche die Curve (aufser in p) in zwei Puncten a und b schneidet, und bezeichnet die Mitte der Strecke ab durch P: so ist der Ort von P eine Curve 3ten Grads P^3, welche p zum Doppelpunct hat und durch die im Unendlichen liegenden drei Puncte a_∞ der

gegebenen Curve C^3 geht. Sind p, p_1 und p_2 drei Puncte der Curve C^3, welche in einer Geraden G liegen, *so schneiden die ihnen entsprechenden drei Curven P^3, P_1^3 und P_2^3 einander zusammen (außer in jenen 3 Puncten a_x) in solchen 6 Puncten Q, welche in einem Kegelschnitte Q^2 liegen. Wird die Gerade G sich selbst parallel bewegt, so ändern sich zwar mit den Puncten p, p_1, p_2 und den Curven P^3, P_1^3, P_2^3 auch zugleich die 6 Puncte Q: aber der Kegelschnitt Q^2, in welchem die letztern stets liegen, bleibt unveränderlich fest.*

23. Durch gegebene 9 Puncte p ist die Curve 3ten Grads, G^3, im Allgemeinen, absolut bestimmt; und eben so die Curve 3ter Classe, K^3, durch gegebene 9 Tangenten g.

Soll dagegen eine Curve G^3 durch gegebene 8 Puncte p gehen und eine gegebene Gerade g berühren, so ist sie vierdeutig bestimmt, d. h. so finden 4 Lösungen statt; und gleicherweise ist die Curve K^3, wenn sie 8 gegebene Gerade g berühren und durch einen gegebenen Punct p gehen soll, vierdeutig bestimmt.

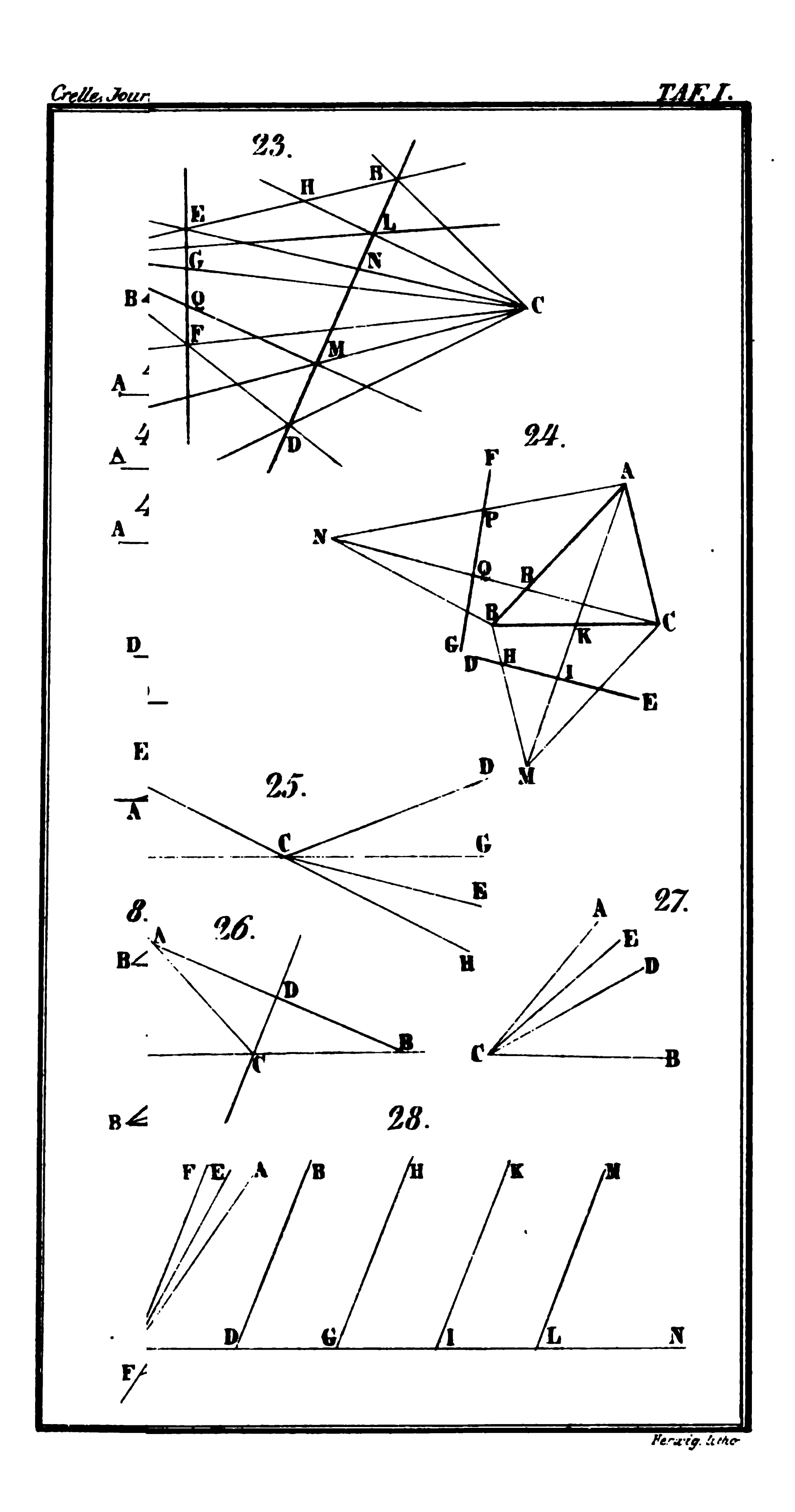
Wie verhält es sich nun in dieser Hinsicht, wenn die Curve G^3 durch 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 gegebene Puncte p gehen und beziehlich 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gegebene Gerade g berühren soll? Wie steigt die Zahl der Lösungen? Für die Curve K^3 findet in allem Analoges statt.

Berlin, im November 1852.

Verbesserungen im vorhergehenden Hefte.

S. 205 oben lies λ^2, λ_1^2, λ_2^2 statt λ, λ_1, λ_2
— 207 unten lies $\alpha^2 : \beta^2 = yB : yA$ statt $yA : yB$
— 208 oben lies $\alpha_1^2 : \beta_1^2 = zB : zA$ statt $zA : zB$
— — Zeile 8 lies $\alpha\alpha_1 : \beta\beta_1 = b : a$ statt $a : b$
— — Zeile 11 und 12 sind a und A^2 mit b und B^2 zu vertauschen.

Druck von G. Reimer in Berlin.


Crelle, Jour.
TAF. I.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
8.
Herzig. litho



1.

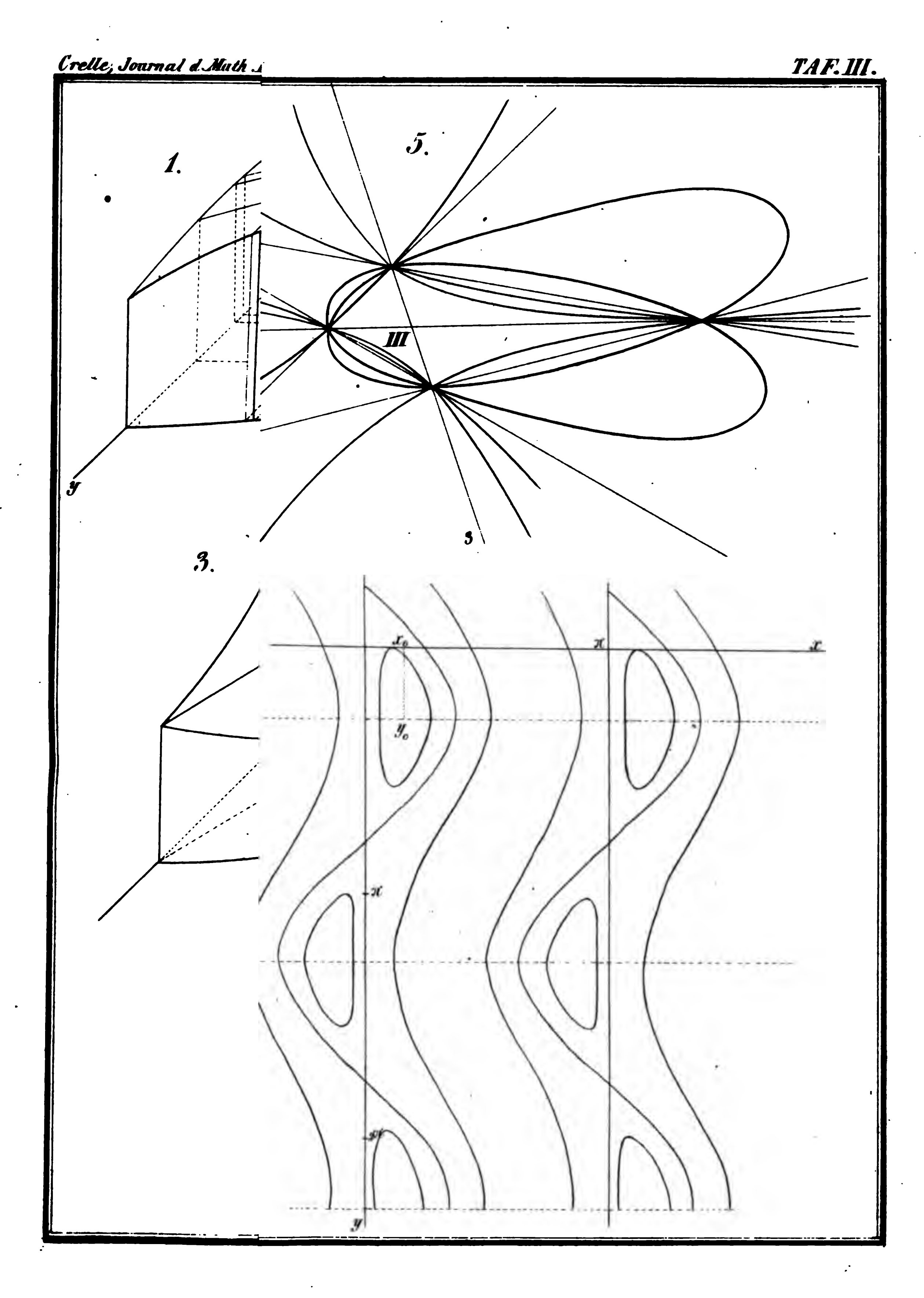
z (5) (4) (3) (2) (1) ξ x

2.

z (2) (1) (3) ξ x y

3.

z (5) (4) (9) (3) (2) (8) (1) (7) (6) ξ x y


1.
y
5.
III
s
3.
x_0
y_0
x
x
x
y
y

A²

U X A

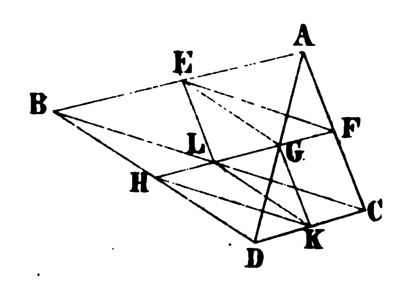
X

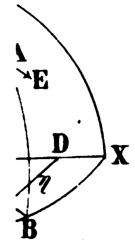
A²

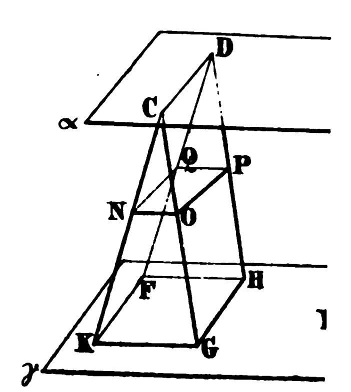
X U

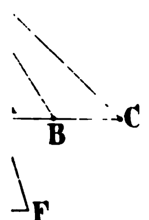
C

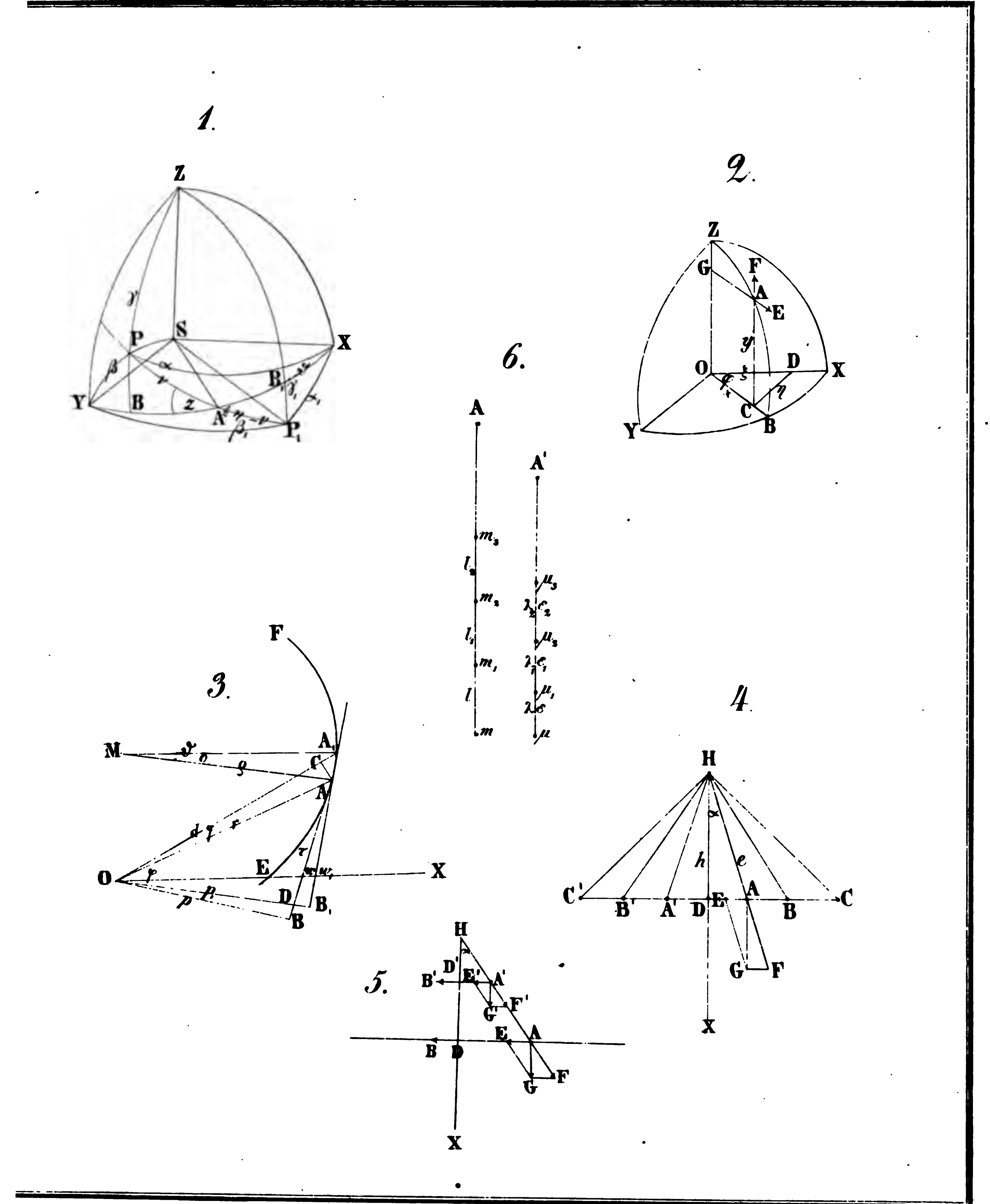
1.

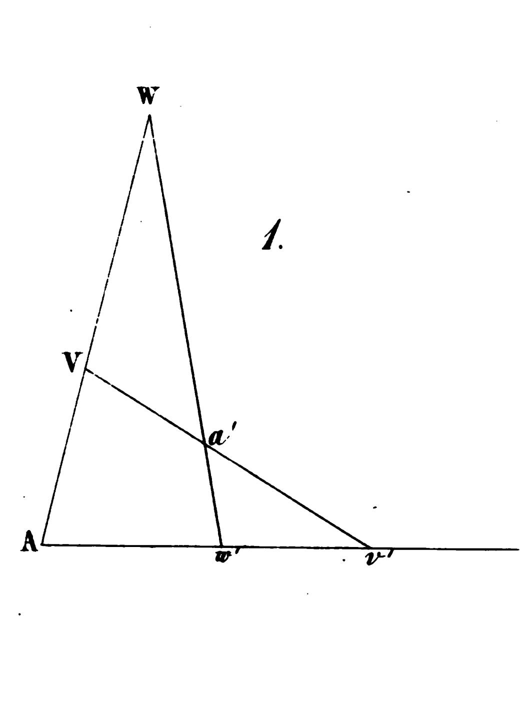


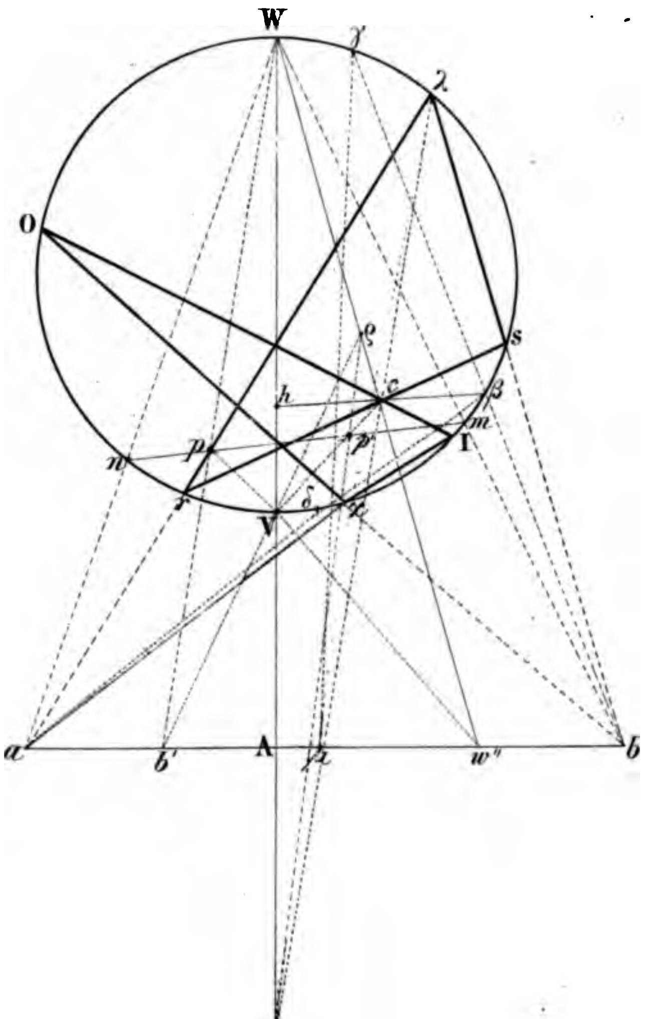







1.
Z
S
P
X
Y
B
A
P₁
2.
Z
G
F
A
E
O
D
X
C
B
Y
3.
F
M
A₁
C
A
O
E
X
D
B₁
B
4.
H
h
e
C'
B'
A'
D
E
A
B
C
G
F
X
5.
H
D'
B'
E'
A'
G'
F'
E
A
B
D
G
F
X
6.
A
A'


1.
W
V
a'
A
w'
v'


2.
W
γ
λ
O
s
ρ
h
c
β
m
p
p
Γ
n
r
δ
V
a
b'
A
w''
b
v



STORAGE AREA

